

# Formfaktoren und Lokalität in integrablen Modellen der Quantenfeldtheorie in $1 + 1$ Dimensionen

DIPLOMARBEIT  
AM FACHBEREICH PHYSIK DER  
FREIEN UNIVERSITÄT BERLIN

VORGELEGT  
VON  
THOMAS QUELLA

BETREUT VON  
DR. M. KAROWSKI  
UND  
DR. A. ZAPLETAL  
BEI  
PROF. DR. R. SCHRADER

AUGUST 1999  
(ÜBERARBEITETE FASSUNG  
VOM 13. OKTOBER 1999)



# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b>	<b>7</b>
<b>1 Streuung in integrablen Modellen der QFT</b>	<b>19</b>
1.1 Vorbemerkungen zur Notation . . . . .	19
1.2 Grundzüge relativistischer Streutheorie . . . . .	20
1.3 Streuung für integrable Modelle in 1 + 1 Dimensionen . . . . .	22
1.3.1 Rapiditäten . . . . .	22
1.3.2 Faktorisierung der $S$ -Matrix und erste Folgerungen . . . . .	23
1.3.3 Analytizitätsbereiche der $S$ -Matrix . . . . .	24
1.3.4 Formalisierung und graphische Notation . . . . .	25
1.3.5 Crossing-Symmetrie . . . . .	26
1.3.6 Die Yang-Baxter-Gleichung . . . . .	27
1.3.7 Gebundene Zustände . . . . .	27
1.4 Zusammenstellung der $S$ -Matrix-Axiome . . . . .	31
<b>2 Formfaktoren</b>	<b>33</b>
2.1 Definition und Herleitung einiger Eigenschaften . . . . .	33
2.1.1 Definition der Formfaktoren . . . . .	33
2.1.2 Crossing-Relationen . . . . .	34
2.1.3 Die Watsongleichung . . . . .	35
2.2 Rapiditätsabhängige Formfaktoren . . . . .	37
2.2.1 Definition und Watsongleichung . . . . .	37
2.2.2 Crossing-Relationen . . . . .	38
2.2.3 Kinematische Pole und Residuen . . . . .	41
2.2.4 Gebundene Zustände . . . . .	42
2.2.5 Formfaktoren und Korrelationsfunktionen . . . . .	44
2.3 Zusammenstellung der Formfaktoraxiome . . . . .	45
2.4 Ein alternativer Zugang zu Formfaktoren . . . . .	46
2.4.1 Die Zamolodchikov-Algebra . . . . .	46
2.4.2 Rapiditätsgeordnete Zustände . . . . .	48
2.4.3 Verallgemeinerte Normalprodukte und Wick-Theorem . . . . .	49
2.4.4 Alternative Definition der Formfaktoren . . . . .	51
2.4.5 Allgemeine Crossing-Relation . . . . .	52
<b>3 Das Bootstrap-Programm</b>	<b>57</b>
3.1 Das allgemeine Vorgehen . . . . .	57
3.2 Das $Z(N)$ -Ising-Modell . . . . .	58

3.2.1	Definition des Modells und Bestimmung der $S$ -Matrix . . . . .	58
3.2.2	Diskussion der gebundenen Zustände . . . . .	60
3.2.3	Konsistenz mit dem Bootstrap-Bild . . . . .	61
3.3	Das Sinus-Gordon-Modell . . . . .	62
3.3.1	Lagrange-Formulierung des Sinus-Gordon-Modells . . . . .	62
3.3.2	Das Bootstrap-Programm: Die Soliton-Antisoliton- $S$ -Matrix . . . .	63
3.3.3	Weitere Teilchen: Breather . . . . .	65
3.3.4	Konsistenz mit dem Bootstrap-Bild . . . . .	67
<b>4</b>	<b>Formfaktoren und Lokalität</b>	<b>71</b>
4.1	Einleitende Bemerkungen zur Thematik . . . . .	71
4.2	Einführung einer kompakten Nomenklatur . . . . .	71
4.3	Vorbereitungen für den Beweis . . . . .	75
4.4	Das Kommutativitätstheorem für Modelle ohne gebundene Zustände . . . .	82
4.5	Gebundene Zustände und Lokalität . . . . .	85
4.5.1	Darstellung der Überlegungen am einfachen Beispiel . . . . .	85
4.5.2	Der allgemeine Fall . . . . .	91
<b>5</b>	<b><math>spl(2, 1)</math>-Matrix-Differenzgleichung</b>	<b>95</b>
5.1	Definitionen . . . . .	95
5.1.1	Einleitung . . . . .	95
5.1.2	Nomenklatur . . . . .	96
5.1.3	Definition der $S$ -Matrix . . . . .	96
5.1.4	Verschiedene Arten von Monodromiematrizen . . . . .	97
5.2	Yang-Baxter-Struktur . . . . .	100
5.2.1	Vertauschungsrelationen . . . . .	100
5.2.2	Gruppentheoretische Eigenschaften . . . . .	101
5.3	Die $spl(2, 1)$ -Matrix-Differenzgleichung . . . . .	103
5.3.1	Definition der Matrix-Differenzgleichung . . . . .	103
5.3.2	Der Off-Shell Bethe Ansatz . . . . .	104
5.4	Höchste-Gewicht-Eigenschaft der Bethe Ansatzvektoren . . . . .	114
<b>A</b>	<b>LSZ-Reduktion für skalare Felder</b>	<b>119</b>
<b>B</b>	<b>Beweis des verallgemeinerten Wick-Theorems</b>	<b>123</b>
<b>C</b>	<b>Konsistenz des neu postulierten Fusionsprozesses</b>	<b>125</b>
<b>D</b>	<b>Analysen und Nebenrechnungen</b>	<b>127</b>
D.1	Analyse des Beweises von Smirnov . . . . .	127
D.2	Argument des Exponentialfaktors . . . . .	127
<b>E</b>	<b>Rechnungen zur Matrixdifferenzgleichung</b>	<b>129</b>
E.1	Beweis der Unitarität . . . . .	129
E.2	Beweis der Yang-Baxter-Gleichung . . . . .	130
E.3	Beweis der Vertauschungsrelationen . . . . .	131
E.4	Die Hilfsfunktionen . . . . .	135
E.5	Nebenrechnungen . . . . .	135

<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>137</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>140</b>



# Einleitung

Seit geraumer Zeit stoßen klassische integrable Feldtheorien auf ein breites Interesse, da sich Lösungen mit solitonischem Charakter konstruieren lassen. Solitonen sind lokalisierte Anregungen, die sich gegenseitig durchdringen können, ohne ihre Form zu verändern. Die bekanntesten klassischen integrablen Modelle – sie beinhalten alle eine Raum- und eine Zeitdimension – sind die Korteweg-de Vries-Gleichung [1, 2], das Sinus-Gordon-Modell [3] und die nichtlineare Schrödingergleichung [4], die durch die Gleichungen

$$\dot{\phi}(t, x) - 6\phi(t, x)\phi'(t, x) + \phi'''(t, x) = 0 \quad (\text{Korteweg-de Vries-Gleichung})$$

$$\ddot{\phi}(t, x) - \phi''(t, x) + \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta \phi(t, x) = 0 \quad (\text{Sinus-Gordon-Modell})$$

$$i\dot{\phi}(t, x) + \phi''(t, x) - 2\chi|\phi(t, x)|^2\phi(t, x) = 0 \quad (\text{nichtlineare Schrödingergleichung})$$

gegeben sind. Die letzten beiden sind offenbar Modifikationen von freien Wellengleichungen, im ersten Fall der Klein-Gordon-Gleichung und im zweiten der Schrödingergleichung. Weitere integrable Modelle, die jedoch eher in der Quantenfeldtheorie eine Rolle spielen, sind das nichtlineare  $\sigma$ -, das  $Z(N)$ -Ising-, das massive Thirring- und das Gross-Neveu-Modell. Das nichtlineare  $\sigma$ -Modell dient als niederdimensionales Modell für die Quantenchromodynamik, die Theorie der starken Wechselwirkung, während das  $Z(2)$ -Ising-Modell mit dem Ising-Modell der statistischen Physik im Skalenlimes assoziiert ist.

Allgemein ist die Integrabilität eines Systems mit  $n$  Freiheitsgraden äquivalent zu der Existenz von  $n$  unabhängigen Erhaltungsgrößen. Für Feldtheorien, die definitionsgemäß mindestens einen kontinuierlich parametrisierten Freiheitsgrad besitzen, bedeutet dies, daß es unendlich viele unabhängige Erhaltungsgrößen geben muß – in der Feldtheorie oft erhaltene Ladungen genannt und über das Noether'sche Prinzip mit Symmetrien verbunden. In konformen Feldtheorien in  $1 + 1$  Dimensionen sind das zum Beispiel die erhaltenen Ladungen der klassischen Virasoro-Algebra. Derartige konforme Symmetrien gehen auf Reparametrisierungsinvarianzen der Raum-Zeit zurück und treten nur in masselosen Theorien auf.

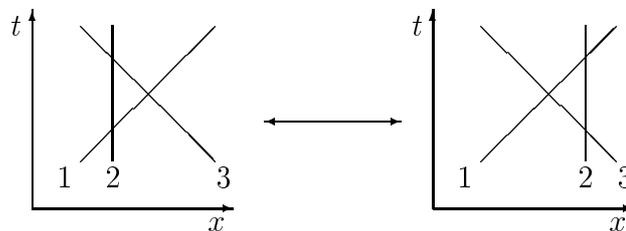
Der Schritt von einer klassischen Feldtheorie zu einer Quantenfeldtheorie ist keineswegs trivial. Dies liegt an der Tatsache, daß die lokalen Felder nicht wie in der Quantenmechanik gewöhnliche Operatoren sind, sondern operatorwertige Distributionen, d.h. streng genommen müssen sie mit einer Testfunktion verschmiert werden, bevor sie auf einen Zustand angewendet werden können. Hier soll jedoch trotzdem weiterhin von Operatoren gesprochen werden, da dies auch in der Literatur weitgehend üblich ist. Distributionen lassen sich in der Regel nicht miteinander multiplizieren, und daher sind im allgemeinen auch Produkte von Feldern im mathematisch strengen Sinne in der Quantenfeldtheorie nicht definiert. Dies ist der Grund für das Auftreten von Divergenzen wie z.B. einer unendlich hohen Nullpunktenergie, die durch Renormierung beseitigt werden

müssen (vgl. [5, 6, 7, 8]). Da in den erhaltenen Ladungen der klassischen Feldtheorie im allgemeinen Produkte von Feldern auftreten, können bei der Quantisierung der Theorie Anomalien – d.h. Zusatzterme – auftreten, so daß die Integrabilität nicht zwangsläufig erhalten bleiben muß. Ein Beispiel für das Auftreten eines Zusatzterms gegenüber dem Klassischen ist die zentrale Ladung in den Vertauschungsrelationen der Generatoren der Quanten-Virasoro-Algebra.

Für eine Reihe von Modellen, zum Beispiel das Sinus-Gordon-Modell, ist der Nachweis gelungen, daß die erhaltenen Ladungen die Quantisierung überleben und unabhängig bleiben, so daß auch die Quantenversion integrabel ist [9]. Besonders interessant ist, daß sich dadurch einschneidende Bedingungen für die Streuung von Teilchen ergeben [10]. So gilt:

1. Die Zahl der Teilchen vor und nach der Streuung ist gleich.
2. Darüber hinaus bleibt nicht nur der Gesamtimpuls erhalten, sondern jeder einzelne Impuls für sich.
3. Die  $S$ -Matrix faktorisiert, d.h. die  $n$ -Teilchen- $S$ -Matrix läßt sich in geeigneter Weise als Produkt von Zweiteilchen- $S$ -Matrizen schreiben.

Die ersten beiden Punkte sind anschaulich unter solitonischem Verhalten zu subsumieren. Der letzte Punkt hat eine ganz besondere Relevanz, da er zur Entdeckung der sogenannten Quantengruppen führte, die zur Zeit ein wichtiger Gegenstand der Forschung sind und zahlreiche Anwendungen in der Quantenfeldtheorie sowie der statistischen Physik finden. Daher soll hier ausführlicher auf die Faktorisierung eingegangen werden. Betrachte die beiden Streuprozesse



Die einzelnen Wechselwirkungen mögen räumlich und zeitlich weit voneinander entfernt stattfinden, so daß es erlaubt ist, die Teilchenbahnen durch gerade Linien zu approximieren. Beide Diagramme zeigen einen Prozeß, bei dem drei Teilchen wieder in drei Teilchen übergehen, wobei links allerdings erst Teilchen 1 mit 2 streut, während rechts zuerst die Teilchen 2 und 3 miteinander in Wechselwirkung treten. Es gibt offenbar zwei inäquivalente Möglichkeiten, eine Dreiteilchen- $S$ -Matrix als Produkt von Zweiteilchen- $S$ -Matrizen zu schreiben, wenn man jede einzelne Wechselwirkung durch letztere ausdrückt. Die Symmetrieoperationen, die mit den höheren erhaltenen Ladungen verbunden sind, erlauben es, die Trajektorien in der dargestellten Weise zu verschieben, so daß in integrablen Modellen beide Möglichkeiten das gleiche Ergebnis liefern müssen. Dies führt zur berühmten Yang-Baxter-Gleichung

$$S^{(3)} = S_{23}(\alpha_2 - \alpha_3)S_{13}(\alpha_1 - \alpha_3)S_{12}(\alpha_1 - \alpha_2) = S_{12}(\alpha_1 - \alpha_2)S_{13}(\alpha_1 - \alpha_3)S_{23}(\alpha_2 - \alpha_3)$$

für die Zweiteilchen- $S$ -Matrizen. Die Parameter  $\alpha_i$  – Rapiditäten genannt – sind dabei ein Maß für den Impuls der Teilchen. Diese Gleichung hat sich als außerordentlich reichhaltig

in den verschiedensten Gebieten der Physik und Mathematik herausgestellt. Sie liefert wie schon erwähnt die Grundlage für das Studium von Quantengruppen bzw. Hopfalgebren, die in gewisser Weise eine Verallgemeinerung herkömmlicher Lie-Algebren darstellen [11, 12, 13]), und spielt darüber hinaus in integrablen Modellen der Quantenfeldtheorie in  $1 + 1$  Dimensionen [14, 15, 16]) und der statistischen Physik in zwei Dimensionen [15, 17, 18, 19, 20]) eine überragende Rolle. So ist es zum Beispiel möglich, mit Techniken des algebraischen Bethe Ansatzes, die auf die durch die Yang-Baxter-Gleichung definierte Struktur zurückgehen, Heisenberg-Modelle elegant zu lösen [18]. Weitere erfolgreich behandelte Modelle in der statistischen Physik sind das Eismodell (6-Vertex-Modell), das 8-Vertex-Modell [17], das supersymmetrische t-J-Modell als Modell für Hoch-Temperatur-Supraleitung [21] sowie das Hubbard-Modell für stark korrelierte Elektronensysteme [22]. Die Yang-Baxter-Struktur erlaubt einerseits in vielen Fällen eine explizite Berechnung der Zustandssumme im thermodynamischen Limes und andererseits eine Klassifikation des auftretenden Spektrums über die Darstellungstheorie der assoziierten Hopfalgebren. Daß Quantenfeldtheorien und statistische Physik in diesem Zusammenhang gemeinsam auftreten, ist nicht verwunderlich, da es eine starke Korrespondenz von statistischen Modellen an kritischen Punkten und konformen wie massiven Feldtheorien gibt. So ist die Zustandssumme eines Vertexmodells eng mit dem Pfadintegral einer euklidischen Quantenfeldtheorie auf dem Gitter verbunden. Die Überschneidungen beider Gebiete gehen sogar so weit, daß es möglich ist, mit dem thermodynamischen Bethe Ansatz die zentrale Ladung einer konformen Quantenfeldtheorie zu berechnen [23].

Da die Yang-Baxter-Gleichung reichhaltige Strukturen bereitstellt und die Probleme der Quantisierung inklusive der Renormierung etc. vollständig vermieden werden, ist es sinnvoll, den Blickpunkt zu wechseln und integrable Modelle der Quantenfeldtheorie nicht mehr über Lagrange-Dichten zu definieren, sondern durch die Konstruktion einer  $S$ -Matrix zu *klassifizieren*, die sowohl die Yang-Baxter-Gleichung erfüllt als auch die quantenfeldtheoretisch notwendigen Eigenschaften wie Unitarität, Lorentzinvarianz und Crossing-Symmetrie<sup>1</sup>. Weitere Eingangsgrößen sind das Teilchenspektrum und die Beziehungen der jeweiligen Teilchen untereinander, also grob gesprochen jede Art von Symmetrien. Man erhält daraus ein System von Funktionalgleichungen, zu dem eine Lösung gefunden werden muß. Diese Vorgehensweise wurde in den 70er Jahren entwickelt und ist unter dem Namen Bootstrap-Programm bekannt [24, 25]. Für integrable Modelle in  $1 + 1$  Dimensionen ist dieses Programm wesentlich erfolgreicher als dasjenige, das in den 60er Jahren ursprünglich für  $3 + 1$  Dimensionen in der Teilchenphysik ausgearbeitet wurde [26, 27]. So ließen sich mit Hilfe des Bootstrap-Verfahrens in  $1 + 1$  Dimensionen die exakten  $S$ -Matrizen vieler wichtiger Modelle – unter anderem die des Sinus-Gordon-Modells und des massiven Thirring-Modells [28] – explizit angeben, die auf anderen Wegen nicht zu bestimmen waren. Dabei stellte sich zum Beispiel heraus, daß die Vermutung über die Äquivalenz dieser beiden Modelle zutrifft, die Coleman 1975 störungstheoretisch begründet hatte [29]. Die Verbindung zu Theorien, die in der Lagrange-Formulierung gegeben sind, muß indirekt erfolgen, da im Bootstrap-Bild nicht die Felder, sondern die Zustände die primären Objekte sind. Die Identifikation kann zum Beispiel über Störungsentwicklungen sowie den

---

<sup>1</sup>Eine gegebene Lagrange-Dichte eines klassischen integrablen Modells garantiert wegen der Möglichkeit von Anomalien noch nicht die Integrabilität des Quanten-Modells. Diese müßte erst überprüft werden, was ein außerordentlich schwieriges Unterfangen ist. Andererseits kann man Integrabilität geradezu dadurch definieren, daß die  $S$ -Matrix die drei oben genannten Eigenschaften besitzt, also insbesondere faktorisiert und die Yang-Baxter-Gleichung erfüllt.

Vergleich des Teilchenspektrums und des asymptotischen Verhaltens geschehen.

Beschreibt die  $S$ -Matrix  $S_{12}(\theta_{12})$  ( $\theta_{12} = \theta_1 - \theta_2$ ) die Streuung zweier Teilchen 1 und 2 mit den Rapiditäten  $\theta_1, \theta_2$  und ist  $\bar{2}$  das Antiteilchen zu 2, so haben die  $S$ -Matrix-Gleichungen die Form

- (i) Unitarität:  $S_{12}^\dagger(\theta_{12})S_{12}(\theta_{12}) = \mathbf{1}$ .
- (ii) Crossing-Relation:  $S_{12}(\theta_{12}) = S_{\bar{2}1}(i\pi - \theta_{12})$ .
- (iii) Yang-Baxter-Gleichung:  $S_{12}(\theta_{12})S_{13}(\theta_{13})S_{23}(\theta_{23}) = S_{23}(\theta_{23})S_{13}(\theta_{13})S_{12}(\theta_{12})$ .
- (iv) Bootstrap-Gleichung:  $S_{(12)3}(\theta_{(12)3})\eta_{12}^{(12)} = \eta_{12}^{(12)}S_{13}(\theta_{13})S_{23}(\theta_{23})|_{\theta_{12}=\theta_{12}^{(12)}}$ .

Die im letzten Punkt auftretenden, ursprünglich in [30] eingeführten „Intertwiner“  $\eta_{12}^{(12)}$  beschreiben die „Fusion“ der Teilchen 1, 2 zu einem gebundenen Zustand (12). Ihre Struktur steht in engem Zusammenhang mit der Yang-Baxter-Algebra, die dem Modell zugrunde liegt. Sie können aufgefaßt werden als „Yang-Baxter“-Verallgemeinerung von herkömmlichen Clebsch-Gordon-Koeffizienten, die bei der Zerlegung von Produktdarstellungen von Lie-Gruppen relevant sind. Die Bootstrap-Gleichung ist daher nur bis auf eine Phase bestimmt. In Kapitel 1 werden die Grundlagen der Streuung in integrierbaren Modellen in 1 + 1 Dimensionen genauer ausgeführt. Anschließend wird in Kapitel 3 das Bootstrap-Programm am Beispiel von  $Z(N)$ -Ising- und Sinus-Gordon-Modell eingehender vorgestellt.

Eine Quantenfeldtheorie gilt als vollständig gelöst, wenn sämtliche Korrelationsfunktionen, d.h. Vakuumerwartungswerte von Produkten von Feldern, bekannt sind. Das Bootstrap-Bild hat wie schon erwähnt das Problem, daß Operatoren nachgeordnete Objekte und außerdem Korrelationsfunktionen Off-Shell-Größen sind, während die  $S$ -Matrix eine On-Shell-Größe ist. Hier kommen die Formfaktoren ins Spiel. Die ursprüngliche Definition von Formfaktoren in der Elementarteilchenphysik bezieht sich auf die Streuung von Teilchen in externen Feldern<sup>2</sup> (vgl. Lamb-Shift, anomales magnetisches Moment, ...). Dabei treten Einteilchenerwartungswerte

$$\langle p' | j^\mu(x) | p \rangle$$

des zugehörigen Stromes  $j^\mu(x)$  auf. Aus Gründen der Lorentzinvarianz und anderer Symmetrien [31] gilt für skalare Teilchen mit einer reellen Funktion  $F$

$$\langle p' | j^\mu(x) | p \rangle = e^{i(p'-p)x} \langle p' | j^\mu(0) | p \rangle = e^{i(p'-p)x} \frac{q}{(2\pi)^3 2\omega_{\vec{p}'} 2\omega_{\vec{p}}} (p' + p)^\mu F(t),$$

wobei die Ladung  $q$  über  $Q|p\rangle = \int d^3x j^0(x)|p\rangle = q|p\rangle$  gegeben ist, d.h.  $F$  besitzt die Normierung  $F(0) = 1$ . Als unabhängige Variable wurde der Skalar  $t = (p' - p)^2 = -2m^2 - 2p'p$  gewählt. Allgemein beschreibt die Fouriertransformierte von  $F$  im Ortsraum die Ladungsverteilung im Teilchen [31], weshalb die Funktion  $F$  als Formfaktor bezeichnet wird. Handelt es sich bei  $j^\mu(x)$  um den elektromagnetischen Strom, so wird  $F(t)$  elektromagnetischer Formfaktor genannt. Im Falle von Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen tritt noch ein weiterer reeller Formfaktor  $G(t)$  auf, wobei hier  $F(0) + G(0) = 1$  gilt. Mit diesen Funktionen läßt sich dann

---

<sup>2</sup>Diese Darstellung orientiert sich am Buch von S. Weinberg [8]. Weitere Einzelheiten sind dort zu finden.

neben der Ladungsverteilung auch das magnetische Moment beschreiben (siehe [8]). Es gilt  $\mu = \frac{qF(0)}{2m}$ , was für  $F(0) = 1$ , d.h. ohne Strahlungskorrekturen, dem Resultat von Dirac entspricht<sup>3</sup> und in allen anderen Fällen ein anomales magnetisches Moment liefert. Diese Vorhersagen gehören zu den experimentell am genauesten verifizierten Aussagen der Physik.

In dieser Arbeit wird ein etwas allgemeinerer Rahmen gewählt als der eben beschriebene. Die verallgemeinerten Formfaktoren eines lokalen Operators  $\mathcal{O}(x)$  sind definiert als die Matrixelemente

$$F^{\mathcal{O}}(\{p_i\})e^{-i\sum_j p_j x} = \langle 0|\mathcal{O}(x)|p_1, \dots, p_n\rangle^{in},$$

wobei der Exponentialfaktor wegen der Translationsinvarianz die vollständige Ortsabhängigkeit des Matrixelementes wiedergibt. Da sich durch sogenannte Crossing-Relationen [31], die in der Störungstheorie und im LSZ-Formalismus gelten, eventuell dort vorhandene Teilchen von der Bra-Seite auf die Ket-Seite wechseln lassen, können durch die verallgemeinerten Formfaktoren beliebige Matrixelemente der Form  $\langle out|\mathcal{O}(x)|in\rangle$  beschrieben werden. So gilt zum Beispiel für  $\{p_i\} \cap \{q_j\} = \emptyset$  formal

$${}^{out}\langle q_m, \dots, q_1|\mathcal{O}(x)|p_1, \dots, p_n\rangle^{in} = \langle 0|\mathcal{O}(x)|-q_m, \dots, -q_1, p_1, \dots, p_n\rangle^{in}.$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite ist dabei als analytische Fortsetzung des physikalischen Matrixelements  $\langle 0|\mathcal{O}(x)|q_m, \dots, q_1, p_1, \dots, p_n\rangle^{in}$  auf negative Energien zu verstehen. Für beliebige Matrixelemente gelten kompliziertere Crossing-Formeln, in denen weitere Summanden mit  $\delta$ -Funktionen der Impulse auftreten. Für eine genauere Diskussion sei auf Kapitel 2 verwiesen.

Sind alle verallgemeinerten Formfaktoren bekannt, können im Prinzip die Korrelationsfunktionen berechnet werden. Durch Einschieben eines vollständigen Systems von Zwischenzuständen erhält man für einen hermiteschen Operator  $\mathcal{O}$  zum Beispiel

$$\langle \mathcal{O}(x)\mathcal{O}(y)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \frac{d\vec{p}_1}{4\pi\omega_{\vec{p}_1}} \dots \frac{d\vec{p}_n}{4\pi\omega_{\vec{p}_n}} e^{-i\sum_j p_j(x-y)} |F^{\mathcal{O}}(\{p_i\})|^2. \quad (1)$$

Analoge Formeln können gefunden werden, falls der Operator nicht hermitesch ist oder der Erwartungswert eines Produktes von mehreren, möglicherweise auch verschiedenen Operatoren zu bestimmen ist. In integrierbaren Modellen in  $1+1$  Dimensionen lassen sich Hilfsfunktionen, die sogenannten rapiditätsabhängigen Formfaktoren

$$f^{\mathcal{O}}(\alpha_1, \dots, \alpha_n),$$

eingeführen, die für  $\alpha_1 > \dots > \alpha_n$  mit dem oben angegebenen physikalischen Matrixelement übereinstimmen und für andere Ordnungen der Rapiditäten  $\alpha$  analytische Fortsetzungen desselben darstellen. Für die Einzelheiten sei auf Kapitel 2 verwiesen. Basierend auf Überlegungen von M. Karowski und P. Weisz konnte aus allgemeinen quantenfeldtheoretischen Überlegungen ein System exakter Funktionalgleichungen für die rapiditätsabhängigen Formfaktoren hergeleitet werden [32]. Diese gliedern sich im wesentlichen in vier Teile und machen Aussagen zu

---

<sup>3</sup>Das vorher Unverständene war der Faktor  $\frac{1}{2}$ !

- (i) dem Verhalten bei analytischer Fortsetzung auf unphysikalische Werte der Rapiditäten, d.h. bei der Vertauschung zweier Argumente. Dies ist durch die sogenannte Watson-Gleichung gegeben:

$$f^{\mathcal{O}}(\theta_1, \dots, \theta_i, \theta_j, \dots, \theta_n) = f^{\mathcal{O}}(\theta_1, \dots, \theta_j, \theta_i, \dots, \theta_n)S(\theta_i - \theta_j).$$

- (ii) dem Verhalten bei zyklischer Vertauschung der Argumente:

$$f^{\mathcal{O}}(\theta_1, \dots, \theta_n) = f^{\mathcal{O}}(\theta_2, \dots, \theta_n, \theta_1 - 2i\pi).$$

- (iii) der Polstruktur in bezug auf kinematische Pole. Das Residuum an einem solchen Pol verknüpft den Formfaktor mit einem anderen, der zwei Teilchen weniger enthält:

$$2\pi i \operatorname{Res}_{\theta_{12}=0} f(\theta_1 + i\pi, \theta_2, \dots, \theta_n) = -4\pi f(\theta_3, \dots, \theta_n)(\mathbf{1} - S(\theta_{2n}) \cdots S(\theta_{23})).$$

- (iv) der Polstruktur in bezug auf Pole, die von gebundenen Zuständen herrühren. Das Residuum verknüpft den Formfaktor hier mit einem Formfaktor, der ein Teilchen weniger enthält:

$$2\pi i \operatorname{Res}_{\theta_1=\theta_2+\theta_{12}^{(12)}} f(\theta_1, \dots, \theta_n) = 2\pi i \sqrt{2} f(\theta_{(12)}, \dots, \theta_n) \eta_{12}^{(12)}.$$

Alle diese Funktionalgleichungen werden in Kapitel 2 hergeleitet und ausführlich diskutiert. In der letzten Gleichung treten wie schon bei den  $S$ -Matrix-Gleichungen die Intertwiner  $\eta_{12}^{(12)}$  auf, mit denen die Fusion zweier Teilchen beschrieben wird. Sind die Phasen dort festgelegt worden, so sind sie hier nicht mehr frei wählbar. In anderen Worten: Es muß darauf geachtet werden, daß die  $S$ -Matrix- und die Formfaktorgleichungen, die gebundene Zustände beschreiben, kompatibel sind. In dieser Arbeit wird erstmals ein vollständiges System von Phasenkonventionen vorgeschlagen, das besonders einfache Formeln zur Folge hat und sich auf einfache Art und Weise graphisch interpretieren läßt.

Wie schon beim Übergang von der Lagrange-Formulierung zum Bootstrap-Bild ist es auch jetzt zweckmäßig, den Blickwinkel zu ändern und diese Formfaktorgleichungen gewissermaßen als „axiomatische Grundlage“ der betrachteten integrablen Quantenfeldtheorie anzusehen. Sind die rapiditätsabhängigen Formfaktoren erst einmal bekannt, lassen sich wie schon im Fall der normalen Formfaktoren die Korrelationsfunktionen berechnen, so daß die Formfaktoren als gleichermaßen fundamentale Objekte angesehen werden können. Diese Betrachtungsweise führt auf das sogenannte Formfaktorprogramm [24, 32].

In Ergänzung zum Bootstrap-Programm wird im Formfaktor-Programm versucht, Lösungen zu den oben erwähnten Formfaktorgleichungen zu finden und diese anschließend bestimmten Operatoren zuzuordnen. Dies kann wie zuvor bei der  $S$ -Matrix wieder indirekt über störungstheoretische oder asymptotische Entwicklungen geschehen. Lange Zeit war es nicht möglich, allgemeine Lösungen der Formfaktorgleichungen oder wenigstens ein Konstruktionsschema anzugeben, so daß nur Formfaktoren bekannt waren, die wenige Teilchen beschreiben. Damit wäre es selbstverständlich nicht möglich gewesen, exakte Korrelationsfunktionen anzugeben. Inzwischen steht mit dem sogenannten Off-Shell Bethe Ansatz jedoch eine leistungsfähige Methode zur Verfügung, mit deren Hilfe für das Sinus-Gordon-Modell Formfaktoren beliebiger Ordnung für die wichtigsten Operatoren bestimmt worden sind [14]. Das Formfaktor-Programm ist somit prinzipiell in

der Lage, exakte Aussagen für integrable niederdimensionale Modellsysteme zu machen. Die Bedeutung dieser Tatsache liegt in drei Bereichen. Zum einen erhofft man sich, ein tieferes Verständnis für die Quantenfeldtheorie im allgemeinen zu gewinnen (z.B. Quark-Confinement) und bislang unbekannte Effekte zu finden, die dann auch in realistischeren Modellen gezielt gesucht und untersucht werden können. Zum anderen ist es möglich, anhand der exakten Ergebnisse die numerischen Verfahren zu testen, die verwendet werden, um Vorhersagen insbesondere aus der Quantenchromodynamik zu erhalten, die bekanntlich nicht störungstheoretisch behandelt werden kann. Ein numerischer Vergleich der Reihenentwicklung für Zwei- und Vierpunkt-Korrelationsfunktionen mit Gitterberechnungen zeigt für das  $O(3)$ -symmetrische nichtlineare  $\sigma$ -Modell, das wie schon erwähnt ein niederdimensionales Modell für die Quantenchromodynamik ist, eine sehr gute Übereinstimmung der Ergebnisse (siehe [33] und [34]). Insbesondere wurde auch festgestellt, daß die Reihenentwicklung (1) sehr schnell konvergiert und ohne großen Fehler bereits nach Formfaktoren mit wenigen Teilchen abgebrochen werden kann. Eine dritte Anwendung betrifft Untersuchungen von Modellen der statistischen Physik. So gab es zum Beispiel im letzten Jahr Veröffentlichungen mit dem Ansatz, die sogenannten Nanoröhrchen – also idealisiert zweidimensionale Objekte – aus Kohlenstoffatomen mit einem Modell in Verbindung zu bringen, in dem zwei Hubbard-Modelle schwach gekoppelt werden [35, 36, 37]. Mit Hilfe von Formfaktoren konnten so theoretische Vorhersagen für die optische Leitfähigkeit, die Spektralfunktion und die Zustandsdichte abgeleitet werden.

Es stellt sich naturgemäß die Frage, ob die Formfaktorgleichungen vollständig sind oder ob es weitere Gleichungen gibt, die das Verhalten der Formfaktoren bestimmen und bisher nur noch nicht bekannt sind. Die numerischen Ergebnisse, die sehr gut mit Computersimulationen übereinstimmen, sind ein erster Hinweis auf die Vollständigkeit. Allerdings gibt es zum einen noch nicht sehr viele dieser Vergleiche, da die wenigsten Modelle schon gelöst worden sind, und zum anderen wäre eine allgemeine theoretische Begründung sehr viel befriedigender. Eines der wichtigsten Merkmale einer Quantenfeldtheorie ist die Lokalität. In der Operatorsprache bedeutet das, daß für zwei raumartig getrennte Raum-Zeit-Punkte  $x$  und  $y$  bosonische Felder die Kommutatorbeziehung

$$[\mathcal{O}_1(x), \mathcal{O}_2(y)] = 0 \quad (2)$$

erfüllen müssen. Anschaulich hängt das damit zusammen, daß es für einen raumartigen Abstand  $x - y$  ein Bezugssystem gibt, in dem die Ereignisse  $x$  und  $y$  gleichzeitig, aber an verschiedenen Orten stattfinden, so daß das Geschehen am einen Ort das am anderen Ort nicht beeinflussen können sollte. Es ist alles andere als selbstverständlich, daß die Formfaktorgleichungen in Verbindung mit dem Bootstrap-Bild diese Lokalität implizieren. 1993 hat F. A. Smirnov in seinem Buch [16] gezeigt, daß sie im Falle eines Modells, das keine gebundenen Zustände besitzt, in der Tat ausreichen, um für bosonische Felder die Lokalitätsbeziehung (2) zu gewährleisten. Der Beweis enthält allerdings einige Vorzeichenfehler. Unter Verwendung der Zamolodchikov-Algebra [38] konnte Lashkevich 1994 das Kommutativitätstheorems auf einem alternativen Weg beweisen, der zwar auch für antikommutierende Felder gilt, jedoch auf Modelle mit diagonalen  $S$ -Matrizen und ohne gebundene Zustände beschränkt ist [39]. Bisher ist zudem für nichtdiagonale  $S$ -Matrizen die Existenz der entsprechenden Zamolodchikov-Algebra noch nicht gesichert, so daß es zu diesem Zeitpunkt nicht sinnvoll erscheint, diesen Weg weiterzuverfolgen. Ließe sich jedoch der Beweis von Smirnov korrigieren und außerdem auf Modelle mit gebundenen Zuständen fortsetzen, wäre dies ein starker theoretischer Hinweis auf die Vollständigkeit

der  $S$ -Matrix- und Formfaktorgleichungen.

Hier setzt die vorliegende Diplomarbeit an, deren wesentliche Ergebnisse im folgenden zusammengefaßt werden. Zum einen wird gezeigt, daß der Beweis von Smirnov seine Gültigkeit behält, wenn einige falsche Formeln<sup>4</sup> in seinem Buch durch andere ersetzt werden, die in den Kapiteln 2 und 4 hergeleitet werden. Andererseits konnte ich den Beweis innerhalb des von Smirnov aufgezeigten Rahmens – wenngleich auch mit anderen Überlegungen und Techniken – auf Modelle mit gebundenen Zuständen verallgemeinern. Dazu wurde eine konkrete Formulierung des Bootstrap-Bildes entwickelt, die optimal die enge Verknüpfung zwischen den  $S$ -Matrix- und den Formfaktorgleichungen beschreibt.

Die beiden Beweise sollen jetzt kurz skizziert werden. Der grundlegende Schritt besteht darin, Matrixelemente des Kommutators  $[\mathcal{O}_1(x), \mathcal{O}_2(y)]$  mit in-Zuständen zu betrachten und für diese eine Darstellung zu finden, in der ausschließlich rapiditätsabhängige Formfaktoren auftreten. Analog zu (1) geschieht das durch Einfügen eines vollständigen Systems von in-Zuständen. Man erhält so in einem ersten Schritt die Gleichung<sup>5</sup>

$$\begin{aligned} & {}^{in}\langle \beta_m, \dots, \beta_1 | \mathcal{O}_1(x) \mathcal{O}_2(y) | \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle^{in} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \int \frac{d\gamma_1}{4\pi} \dots \frac{d\gamma_l}{4\pi} {}^{in}\langle \beta_m, \dots, \beta_1 | \mathcal{O}_1(x) | \gamma_1, \dots, \gamma_l \rangle^{in} \langle \gamma_l, \dots, \gamma_1 | \mathcal{O}_2(y) | \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle^{in}. \end{aligned}$$

Um die Verbindung zu den rapiditätsabhängigen Formfaktoren herzustellen, müssen nun allgemeine Crossing-Relationen verwendet werden. An dieser Stelle liegt der Fehler in Smirnov's Beweis: Die von ihm verwendeten Beziehungen, die er ohne jeden Beweis postuliert, sind schon in den einfachsten Fällen offenkundig falsch. Ein wichtiger Bestandteil meiner Arbeit war daher, eine allgemeine Crossing-Relation zu finden und zu beweisen. Für die Formfaktoren  $F$  läßt sich leicht eine solche Formel angeben. Das Problem besteht darin, diese Formel auf die Funktionen  $f$  zu übertragen, die nur für bestimmte Ordnungen ihrer Argumente mit den  $F$ 's übereinstimmen. Mit Hilfe des LSZ-Formalismus ist es mir gelungen, die speziellen Crossing-Relationen

$$\begin{aligned} & {}^{in}\langle \beta_m, \dots, \beta_1 | \mathcal{O}(x) | \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle^{in} |_{anal.cont.} =: f^{\mathcal{O}}(\beta_1, \dots, \beta_m | \alpha_1, \dots, \alpha_n) \\ &= \sum_{i=1}^n 4\pi \delta(\beta_1 - \alpha_i) f^{\mathcal{O}}(\beta_2, \dots, \beta_m | \alpha_1, \dots, \hat{\alpha}_i, \dots, \alpha_n) S(\alpha_1 - \alpha_i) \dots S(\alpha_{i-1} - \alpha_i) \\ & \quad + f^{\mathcal{O}}(\beta_2, \dots, \beta_m | \beta_1 + i\pi - i0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \\ &= \sum_{i=1}^n f^{\mathcal{O}}(\beta_1, \dots, \beta_{m-1} | \alpha_1, \dots, \hat{\alpha}_i, \dots, \alpha_n) 4\pi \delta(\beta_m - \alpha_i) S(\alpha_i - \alpha_n) \dots S(\alpha_i - \alpha_{i+1}) \\ & \quad + f^{\mathcal{O}}(\beta_1, \dots, \beta_{m-1} | \alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_m - i\pi + i0) \end{aligned}$$

herzuleiten. Über vollständige Induktion war es mir damit zudem möglich, eine allgemeine Crossing-Formel zu beweisen, die in einigen Vorzeichen nicht mit der von Smirnov verwendeten übereinstimmt. Die Formel besagt im Prinzip, daß ein beliebiges Matrixelement einschließlich aller nichtzusammenhängenden Beiträge sich durch analytische Fortsetzungen von Matrixelementen ausdrücken läßt, bei denen sämtliche Teilchen auf einer Seite

<sup>4</sup>Eine genauere Darstellung ist in Anhang D.1 zu finden.

<sup>5</sup>Statt Impulsen werden Rapiditäten verwendet und die anderen Quantenzahlen der Übersichtlichkeit wegen weggelassen!

des Operators stehen. Dabei müssen für jeden Summanden unterschiedliche  $S$ -Matrizen berücksichtigt werden. In einem Exkurs in Kapitel 2 wird gezeigt, daß sich die gleiche allgemeine Crossing-Relation auch mit Hilfe des Ansatzes von Lashkevich [39] und der Zamolodchikov-Algebra beweisen läßt und in kanonischer Art und Weise auf eine graphische Interpretation führt. Auch dies ist meiner Kenntnis nach vorher noch nicht bekannt gewesen.

Es existieren zwei unterschiedliche Versionen der Crossing-Formel. Daher gibt es insgesamt vier verschiedene Möglichkeiten, die beiden Matrixelemente  ${}^{in}\langle\beta_m, \dots, \beta_1 | \mathcal{O}_1(x) | \gamma_1, \dots, \gamma_l \rangle^{in}$  und  ${}^{in}\langle\gamma_l, \dots, \gamma_1 | \mathcal{O}_2(y) | \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle^{in}$  durch rapiditätsabhängige Formfaktoren darzustellen. Eine für unsere Zwecke besonders nützliche Darstellung erhält man, indem man analog zum Vorgehen von Smirnov in der Reihenentwicklung für  ${}^{in}\langle\beta_m, \dots, \beta_1 | \mathcal{O}_1(x) \mathcal{O}_2(y) | \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle^{in}$  bzw.  ${}^{in}\langle\beta_m, \dots, \beta_1 | \mathcal{O}_2(y) \mathcal{O}_1(x) | \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle^{in}$  nach Ausnutzung der Translationsinvarianz und Abseparation der Ortsabhängigkeit die Matrixelemente, die  $\mathcal{O}_1(0)$  enthalten, durch eine der beiden Crossing-Relationen ausdrückt und analog diejenigen mit  $\mathcal{O}_2(0)$  durch die andere. Dabei stellt sich heraus, daß die Darstellungen bezüglich  $\mathcal{O}_1(x) \mathcal{O}_2(y)$  unter Verwendung der Yang-Baxter-Gleichung, der Unitarität und der Crossing-Symmetrie für die  $S$ -Matrix und der Watson-Gleichung für die Formfaktoren in die von  $\mathcal{O}_2(y) \mathcal{O}_1(x)$  übergehen, wenn man die Rapiditäten der Zwischenzustände um  $-i\pi$  verschiebt. Wegen der Integration über die Rapiditäten der Zwischenzustände ist dies äquivalent zu der Verschiebung der Integrationswege der Integrale. Dabei müssen alle Pole des Integranden berücksichtigt werden, die Beiträge zum Residuensatz liefern. In Modellen ohne gebundene Zustände treten bei der oben gewählten Darstellung, bei denen die kinematischen Pole gerade oberhalb des Ausgangs- bzw. unterhalb des Zielintegrationswegs liegen, keine Residuenbeiträge auf, so daß die Lokalität hier gewährleistet ist. Dies ist für Modelle mit gebundenen Zuständen nicht mehr der Fall. Dort haben einerseits die Formfaktoren zusätzliche Pole, die gebundenen Zuständen entsprechen, und andererseits treten in den nichtzusammenhängenden Anteilen ebensolche Pole der  $S$ -Matrizen auf. Offensichtlich ist es für die Gültigkeit der Lokalität notwendig und hinreichend, daß diese unerwünschten Residuenbeiträge sich insgesamt gegenseitig aufheben. Da die Formeln, die verwendet werden müssen, in den meisten Fällen sehr unübersichtlich sind, bestand ein wichtiger Teil meiner Arbeit in der Weiterentwicklung und konsequenten Anwendung von graphischen Methoden zur Veranschaulichung der Sachverhalte und Skizzierung der Beweise.

Gilt  $\{\alpha_i\} \cap \{\beta_j\} = \emptyset$ , d.h. sind keine nichtzusammenhängenden Anteile vorhanden, läßt sich verhältnismäßig einfach zu jedem Residuenbeitrag des einen Formfaktors ein Residuenbeitrag beim anderen finden, so daß ihre Summe gerade verschwindet. Um das zu zeigen, müssen sämtliche  $S$ -Matrix- und Formfaktorgleichungen herangezogen werden. Bei der Durchführung des Beweises wurde für das Sinus-Gordon-Modell ein bislang unbekannter Fusionsprozeß postuliert, der für die Konsistenz unbedingt notwendig ist. Eine anschließende genauere Analyse des Modells ergab die tatsächliche Existenz dieses Prozesses. Wesentlich unübersichtlicher und schwieriger wird der Beweis der Lokalität, falls nichtzusammenhängende Anteile vorhanden sind, da hier nicht nur die Formfaktoren, sondern auch die  $S$ -Matrizen Pole aufweisen. Es wird gezeigt, daß in diesem Fall Residuenbeiträge von zwei verschiedenen Polen und insgesamt jeweils neun Summanden herangezogen werden müssen, die sich dann gegenseitig wegheben. Das Problem bestand insbesondere darin, Kompensationen für die nichtzusammenhängenden Beiträge der  $S$ -Matrizen zu finden, da diese sich in der Regel nicht gegenseitig wegsummieren. Die Lösung ist, daß

einige der anderen Beiträge, bei denen zwei Teilchen in den gleichen Formfaktor einlaufen, als Randwerte von analytischen Funktionen einen versteckten nichtzusammenhängenden Anteil besitzen, der sich erst nach Anwendung der Formel  $\frac{1}{x \pm i0} = \frac{P}{x} \mp i\pi\delta(x)$  [40] offenbart. Faßt man zwei dieser Beiträge zusammen, so kompensieren sie gerade einen Beitrag, der von den  $S$ -Matrizen herrührt. Bei der Zerlegung in Hauptwert- und singulären Anteil zusätzlich auftretende nichtzusammenhängende Beiträge fallen bei der Residuumbildung weg. Der vollständige Beweis ist in Kapitel 4 angegeben.

Um den Beweis zu vereinfachen wurden die  $S$ -Matrix- und Formfaktor-Gleichungen, die bisher in allen mir bekannten Arbeiten jede für sich standen, derart angepaßt, daß eine möglichst kanonische Formulierung des Wechselspiels beider Gleichungssysteme erreicht wurde. Dies war möglich, da die Gleichungen, die gebundene Zustände beschreiben, nur bis auf Phasen festgelegt sind, was der Freiheit entspricht, eine beliebige Phase für diese Zustände zu wählen. Gleichzeitig wurde Wert darauf gelegt, daß die Gleichungen eine in sich konsistente graphische Darstellung besitzen. Das bedeutet, daß alle Beweise weitgehend graphisch veranschaulicht werden können. Der oben beschriebene Beweis der Lokalität gilt für alle Modelle, die sich durch die hier verwendeten  $S$ -Matrix- und Formfaktorgleichungen beschreiben lassen. Für das  $Z(N)$ -Ising und das Sinus-Gordon-Modell werden in Kapitel 3 explizit  $S$ -Matrizen und Phasenkonventionen angegeben, die den angepaßten Bootstrap-Gleichungen genügen, so daß für diese Modelle die Lokalität explizit bewiesen wird. Bei anderen Modellen muß gegebenenfalls eine geeignete Phasenkonvention gefunden werden. Insgesamt ist der hier erbrachte Beweis der Lokalität ein sehr starker Hinweis auf die innere Abgeschlossenheit der Formfaktorgleichungen und des Bootstrap-Bildes.

Die vorliegende Arbeit ist wie folgt gegliedert. Im ersten Kapitel werden die Grundlagen relativistischer Streutheorie in integralen Modellen der Quantenfeldtheorie in  $1 + 1$  Dimensionen vorgestellt und im Anschluß daran alle Gleichungen zusammengefaßt, die die  $S$ -Matrix beschreiben. Das zweite Kapitel enthält die genaue Definition von verallgemeinerten und rapiditätsabhängigen Formfaktoren. Außerdem werden sämtliche Formfaktorgleichungen und insbesondere eine allgemeine Crossing-Relation hergeleitet und als Ausgangspunkt des Formfaktorprogramms in einer Übersicht zusammengestellt. Erfüllt ein Modell die  $S$ -Matrix- und die Formfaktorgleichungen so soll von der Gültigkeit des Bootstrap-Bildes gesprochen werden. Ein kleiner Exkurs widmet sich dem Zusammenhang der Zamolodchikov-Algebra mit integralen Modellen und liefert über eine weitere Formalisierung eine sehr interessante anschauliche Interpretation der letzteren. Als Nebenprodukt wird ein alternativer Beweis der allgemeinen Crossing-Relation angegeben. Im vierten Kapitel wird das Bootstrap-Programm am Beispiel des  $Z(N)$ -Ising- und des Sinus-Gordon-Modells ausführlich vorgestellt und zur Bestimmung der jeweiligen  $S$ -Matrizen verwendet. Anschließend wird gezeigt, daß die so konstruierten  $S$ -Matrizen konsistent sind mit dem Bootstrap-Bild. Der Beweis des oben skizzierten Kommutativitätstheorems ist im fünften Kapitel zu finden.

In Kapitel 5 wird ein mathematisches Problem gelöst, das in engem Zusammenhang mit dem Formfaktorprogramm steht. Dazu wird ein sogenannter verschachtelter Off-Shell Bethe Ansatz, mit dem im Sinus-Gordon-Modell die Formfaktoren bestimmt worden sind [14], verwendet, um für eine supersymmetrische Matrixdifferenzgleichung, die in engem Verhältnis zu den beiden wichtigsten der Formfaktorgleichungen steht, Höchste-Gewicht-Lösungen anzugeben. Damit ist zugleich eine gruppentheoretische Klassifikation sämtlicher Lösungen möglich. Analoge Matrixdifferenzgleichungen wurden bereits für

$S$ -Matrizen untersucht, die mit den (Quanten-)Gruppen  $SU(N)$ -,  $U(N)$ - und  $U_q[su(N)]$  in Beziehung stehen [41, 42]. Ich habe die Überlegungen auf die mit der gradierten<sup>6</sup> Lie-Algebra  $spl(2,1)$  assoziierten  $S$ -Matrix des supersymmetrischen t-J-Modells [21, 22] – einem Modell der statistischen Physik für die Hochtemperatur-Supraleitung – übertragen und gezeigt, daß trotz der Supersymmetrie keine weiteren Komplikationen auftreten. Zwar ist bisher noch kein Modell der Quantenfeldtheorie mit dieser  $S$ -Matrix in Verbindung gebracht worden, aber davon unabhängig ist das Ergebnis ein wichtiger Hinweis auf die Universalität des Off-Shell Bethe Ansatzes.

Der Off-Shell Bethe Ansatz ist eine Abwandlung des algebraischen Bethe Ansatzes und geht auf H. Babujian zurück [43, 44]. Mit ihm lassen sich zum Beispiel Korrelationsfunktionen berechnen und Matrix-Differenzgleichungen lösen, wie sie in den Formfaktorgleichungen auftreten. Mit einem Bethe Ansatz, der speziell auf die zugrundeliegende Yang-Baxter-Struktur zugeschnitten ist, werden gewöhnlich Eigenwertprobleme gelöst. Bei der Anwendung der Operators auf den Ansatzvektor entstehen neben einem Vektor, der proportional zum Ursprungsvektor ist, auch unerwünschte Terme, die sich aus der Yang-Baxter-Struktur berechnen lassen. Der algebraische Bethe Ansatzvektor enthält freie Parameter, die so gewählt werden können, daß die unerwünschten Terme verschwinden und der Bethe Ansatzvektor das Eigenwertproblem löst. In diesem Zusammenhang treten also immer Bethe Ansatzgleichungen auf, die es zu lösen gilt. Im Gegensatz dazu enthält der Off-Shell Bethe Ansatzvektor von vornherein zusätzlich zur Vektorstruktur auch Funktionen, die bestimmten Funktionalgleichungen genügen. Außerdem findet eine Summation oder Integration über einige der dort enthaltenen Variablen statt. Die unerwünschten Terme verschwinden hier nicht durch die Wahl bestimmter Parameter, also der Spezifizierung des On-Shell Verhaltens, sondern erst nach der Summation bzw. Integration. Zur Vertiefung der Thematik von Bethe Ansätzen und deren Bedeutung in der statistischen Physik sei auf vorhandene Literatur verwiesen [11, 15, 17, 18, 45].

Die Kapitel 1-3 enthalten im wesentlichen Zusammenfassungen bekannter Resultate und Formeln, die für die Darstellung der eigenen Ergebnisse von Bedeutung sind. Letztere sind in den Kapiteln 4 (Beweis der Lokalität) und 5 (Lösung der supersymmetrischen Matrixdifferenzgleichung) aufgeführt. Darüber hinaus enthalten auch die ersten Kapitel an einigen Stellen neue Resultate. So sind in den Kapiteln 1 und 2 Modifikationen der bekannten  $S$ -Matrix- und Formfaktorgleichungen vorgestellt worden, die von den Phasenkonventionen optimal aufeinander abgestimmt sind. Ein weiteres Ergebnis ist der Beweis der Existenz eines bisher nicht in der Literatur diskutierten Fusionsprozesses im Sinus-Gordon-Modell in Kapitel 3.

Es ist beabsichtigt, die Ergebnisse zur Lokalität und zur Matrixdifferenzgleichung zur Veröffentlichung bei Fachzeitschriften einzureichen. Außerdem sollen die Untersuchungen bezüglich der Matrixdifferenzgleichung auf den  $q$ -deformierten Fall fortgesetzt werden.

---

<sup>6</sup>Grob gesprochen beinhalten die definierenden Vertauschungsrelationen für die Generatoren einer gradierten Lie-Algebra neben Kommutatoren auch Antikommutatoren. Häufig verwendet man auch den Terminus supersymmetrische Lie-Algebra.



# Kapitel 1

## Streuung in integrablen Modellen der Quantenfeldtheorie

### 1.1 Vorbemerkungen zur Notation

Im folgenden wird die quantenfeldtheoretische Standardnotation für die Metrik verwendet werden:

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Wie in der Literatur üblich werden die Einheiten so gewählt, daß Lichtgeschwindigkeit und Wirkungsquantum den Wert  $\hbar = c = 1$  haben. Für das Skalarprodukt zweier Vektoren  $V, W$  wird die Schreibweise  $VW = V \cdot W = V^\mu W_\mu$  verwendet, wobei gemäß der Einsteinschen Summenkonvention über doppelt auftretende Indizes summiert wird.

Alle betrachteten physikalischen Zustände werden durch die Anwendung von Impulserzeugungsoperatoren  $a_{\epsilon_1}^\dagger(\vec{p}_1)$  aus dem (eindeutigen und unter der Poincare-Gruppe invarianten) Vakuum  $|0\rangle$  generiert. Dabei wird die spezielle Schreibweise

$$\begin{aligned} |(p_1, \epsilon_1), \dots, (p_n, \epsilon_n)\rangle &= a_{\epsilon_1}^\dagger(\vec{p}_1) \cdots a_{\epsilon_n}^\dagger(\vec{p}_n) |0\rangle \\ \langle (p_n, \epsilon_n), \dots, (p_1, \epsilon_1) | &= \langle 0 | a_{\epsilon_n}(\vec{p}_1) \cdots a_{\epsilon_1}(\vec{p}_n) \end{aligned}$$

verwendet. Die Normierung physikalischer Zustände soll in  $d + 1$  Raum-Zeit-Dimensionen durch

$$\langle (p', \epsilon') | (p, \epsilon) \rangle = \delta_{\epsilon'}^{\epsilon} 2\omega_{\vec{p}} (2\pi)^d \delta^d(\vec{p}' - \vec{p}) \quad (1.1)$$

mit  $\omega_{\vec{p}} = \sqrt{m^2 + \vec{p}^2}$  festgelegt sein, was speziell in 1 + 1-dimensionalen Theorien von Vorteil ist. Bei geladenen Feldern werden keine unterschiedlichen Symbole für Teilchen und Antiteilchen verwendet, wie es stellenweise in der Literatur geschieht. Das Antiteilchen  $\bar{\epsilon}$  zu  $\epsilon$  wird durch den Operator  $a_{\bar{\epsilon}}^\dagger(\vec{p})$  erzeugt, so daß z.B. ein freies geladenes skalares Feld mit den kanonischen gleichzeitigen ( $x_0 = x'_0$ ) Vertauschungsrelationen

$$[\phi_\epsilon(x), \phi_{\bar{\epsilon}}^\dagger(x')]_- = \delta_{\epsilon\bar{\epsilon}} \delta^d(\vec{x} - \vec{x}')$$

die Entwicklung

$$\phi(x) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d 2\omega_{\vec{k}}} \left( e^{-ikx} a_{\epsilon}(\vec{k}) + e^{+ikx} a_{\epsilon}^{\dagger}(\vec{k}) \right)$$

besitzt. Es ist wichtig zu betonen, daß in der gesamten Arbeit das Heisenbergbild verwendet werden wird, d.h. die Zeitabhängigkeit sitzt allein bei den Operatoren, die Zustände sind hingegen zeitunabhängig.

Wenn im weiteren von Impulsen gesprochen wird, sind immer die Impulse

$$p = (E, \vec{p}),$$

inklusive der Energiekomponente gemeint. Freie Teilchen müssen auf der Massenschale liegen, d.h. ihre Impulse müssen der Gleichung

$$p^2 = p^{\mu} p_{\mu} = E^2 - \vec{p}^2 = m^2 \quad (1.2)$$

genügen. Insbesondere ist stets  $E = p^0 = \sqrt{m^2 + \vec{p}^2} > 0$ . Man beachte, daß die oben definierten Zustände mit Vierervektoren geschrieben wurden, d.h. daß in der Nomenklatur neben den notwendigen räumlichen Impulskoordinaten  $\vec{p}$  auch die für physikalische Zustände durch (1.2) festgelegte Energie auftritt. Dies wird sich später als nützlich herausstellen, wenn analytische Fortsetzungen von Matrixelementen betrachtet werden sollen.

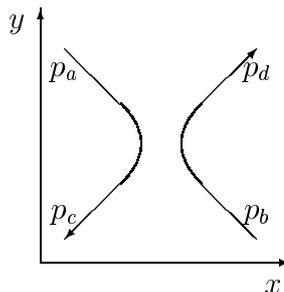
## 1.2 Grundzüge relativistischer Streutheorie

Die LSZ-Annahme [46, 47] besagt, daß alle Felder  $\phi(x)$ , die an einer Streuung beteiligte Teilchen beschreiben, für  $x^0 \rightarrow \mp\infty$  im schwachen Limes gegen freie Felder konvergieren, die sogenannten in-Felder  $\phi^{in}(x)$  und die out-Felder  $\phi^{out}(x)$ . Der Hintergrund dieser Überlegung ist, daß die Teilchen nicht miteinander wechselwirken, wenn sie genügend großen Abstand haben, also lange Zeit vor dem Stoßprozeß bzw. lange Zeit danach. Es ist darum möglich, zwei verschiedene Systeme von Zuständen zu definieren, die jeweils den gesamten Hilbertraum aufspannen.

Bezeichnen wie oben die Operatoren  $a_{\epsilon}^{in/out}(\vec{p})$  und  $a_{\epsilon}^{in/out}(\vec{p})^{\dagger}$  die Entwicklungskoeffizienten des in- bzw. out-Feldes nach Lösungen der jeweiligen freien Wellengleichung, so sind diese Zustände definiert über

$$\begin{aligned} |(p_1, \epsilon_1), \dots, (p_n, \epsilon_n)\rangle^{in/out} &= a_{\epsilon_1}^{in/out}(\vec{p}_1)^{\dagger} \dots a_{\epsilon_n}^{in/out}(\vec{p}_n)^{\dagger} |0\rangle \\ {}^{in/out}\langle (p_n, \epsilon_n), \dots, (p_1, \epsilon_1) | &= \langle 0 | a_{\epsilon_n}^{in/out}(\vec{p}_1) \dots a_{\epsilon_1}^{in/out}(\vec{p}_n). \end{aligned}$$

Das Bild



von Teilchentrajektorien im Ortsraum soll nochmal deutlich machen, daß dieser konkrete Prozeß durch die Zustände  $|(p_a, \epsilon_a), (p_b, \epsilon_b)\rangle^{in}$  bzw.  $|(p_c, \epsilon_c), (p_d, \epsilon_d)\rangle^{out}$  und in der Verallgemeinerung dieses Bildes der gesamte Hilbertraum durch jedes der beiden Zustandssysteme beschrieben werden kann.

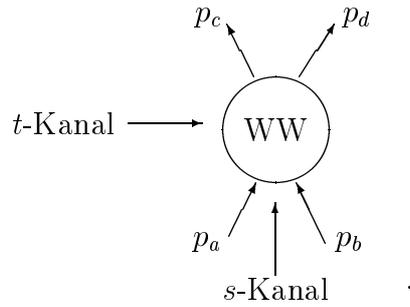
Die  $S$ -Matrix (besser: der Streuoperator  $\hat{S}$ ) ist definiert als derjenige (notwendigerweise unitäre) Operator, der die Vektoren einer Orthonormalbasis von out-Zuständen in solche einer Orthonormalbasis von in-Zuständen überführt:

$$|(p_1, \epsilon_1), \dots, (p_n, \epsilon_n)\rangle^{in} = \hat{S}|(p_1, \epsilon_1), \dots, (p_n, \epsilon_n)\rangle^{out}.$$

Die durch Adjugation gewonnene Beziehung  $\langle in| = \langle out|\hat{S}^\dagger$  zeigt, daß die Matrixelemente dieses Operators bezüglich der in-Basis folgendermaßen geschrieben werden können

$$\begin{aligned} {}^{in}\langle (q_m, \nu_m), \dots, (q_1, \nu_1)|\hat{S}|(p_1, \epsilon_1), \dots, (p_n, \epsilon_n)\rangle^{in} \\ = {}^{out}\langle (q_m, \nu_m), \dots, (q_1, \nu_1)|(p_1, \epsilon_1), \dots, (p_n, \epsilon_n)\rangle^{in}. \end{aligned}$$

Wir wollen hier im weiteren nur auf eine spezielle Klasse von Zweiteilchenstreuprozessen eingehen, die im Hinblick auf Streutheorie in 1 + 1 Dimensionen wichtig ist. Der zu betrachtende Streuprozess ist schematisch in der folgenden Abbildung dargestellt:



Zwei Teilchen mit den Massen  $m_a$  und  $m_b$ , sowie den Impulsen  $p_a$  und  $p_b$  mögen sich aus dem Unendlichen annähern und in Wechselwirkung treten. Dabei sollen wieder zwei Teilchen mit den Massen  $m_c$  und  $m_d$  entstehen, die mit den Impulsen  $p_c$  und  $p_d$  im Unendlichen verschwinden. Natürlich muß der Gesamtimpuls vor und nach der Streuung der gleiche sein:  $p_a + p_b = p_c + p_d$ .

Über die folgenden Relationen können die sogenannten Mandelstam-Variablen eingeführt werden:

$$\begin{aligned} s &= (p_a + p_b)^2 = m_a^2 + m_b^2 + 2p_a p_b = (p_c + p_d)^2 = m_c^2 + m_d^2 + 2p_c p_d, \\ t &= (p_a - p_c)^2 = m_a^2 + m_c^2 - 2p_a p_c = (p_d - p_b)^2 = m_d^2 + m_b^2 - 2p_d p_b, \\ u &= (p_a - p_d)^2 = m_a^2 + m_d^2 - 2p_a p_d = (p_c - p_b)^2 = m_c^2 + m_b^2 - 2p_c p_b. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Sie gehören zu den Prozessen

- (i)  $a + b \rightarrow c + d$  ( $s$ -Kanal),
- (ii)  $a + \bar{c} \rightarrow d + \bar{b}$  ( $t$ -Kanal) bzw.
- (iii)  $a + \bar{d} \rightarrow c + \bar{b}$  ( $u$ -Kanal),

je nachdem aus welcher Richtung das Diagramm gelesen wird. Die Crossing-Symmetrie [31] besagt, daß alle drei Prozesse durch verschiedene Randwerte einer einzigen analytischen Funktion beschrieben werden. Genauer sind diese Randwerte gegeben durch

- (i)  $s$ -Kanal:  $\text{Re } s > (m_a + m_b)^2$ ,  $\text{Im } s = i0$ ;
- (ii)  $t$ -Kanal:  $\text{Re } t > (m_a + m_c)^2$ ,  $\text{Im } t = i0$ ;
- (iii)  $u$ -Kanal:  $\text{Re } u > (m_a + m_d)^2$ ,  $\text{Im } u = i0$ .

Die Bedeutung der Crossing-Symmetrie liegt darin, daß man durch analytische Fortsetzung der Amplitude des einen Prozesses zu denen der anderen gelangt. Daß die Variablen einen kleinen Imaginärteil haben müssen, folgt aus der Struktur der Propagatoren, also zum Beispiel für skalare bzw. Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen

$$\Delta_F(k) = \frac{1}{k^2 - m^2 + i0} \quad \text{bzw.} \quad S_F(k) = \frac{1}{\not{k} - m + i0}. \quad (1.4)$$

Unter Ausnutzung der Impulserhaltung ergibt sich die Identität

$$s + t + u = 3m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 + m_d^2 + 2p_a \overbrace{(p_b - p_c - p_d)}^{-p_a} = m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 + m_d^2,$$

so daß nur zwei der drei Mandelstam-Variablen wirklich unabhängig sind. Sie spielen eine große Rolle bei der Beschreibung von Streuprozessen, da sie die einzigen auftretenden dynamischen Parameter sind. Der Übergang von  $s + i0$  zu  $s - i0$  entspricht dem Übergang von avancierter zu retardierter Greens-Funktion oder – anders gesprochen – dem Übergang  $in \rightarrow out$ . Dies hängt auch damit zusammen, daß die Zeitumkehr über einen *anti*unitären Operator dargestellt wird.

## 1.3 Streuung für integrable Modelle in 1 + 1 Dimensionen

### 1.3.1 Rapiditäten

In zwei Dimensionen ist die eine Komponente des Impulses  $p = (p^0, p^1)$  über die Massenschalenbedingung (1.2) direkt mit der anderen verknüpft. Es gibt daher die folgende Möglichkeit, beide durch einen einzigen Parameter – die sogenannte Rapidität  $\theta$  – zu parametrisieren und damit die Massenschalenbedingung automatisch zu erfüllen:

$$p(\theta) = m (\text{ch } \theta, \text{sh } \theta).$$

Die Normierung von Zuständen (1.1) lautet dann

$${}^{in/out} \langle (p, \nu) | (q, \epsilon) \rangle^{in/out} = 2p^0 \delta_\epsilon^\nu 2\pi \delta(p^1 - q^1) = 4\pi \delta_\epsilon^\nu \delta(\theta_1 - \theta_2).$$

Aus der Gleichung  $p^1 = \frac{mv}{\sqrt{1-v^2}}$  folgt nach elementarer Rechnung für die Geschwindigkeit  $v$  des Teilchens die Beziehung

$$v = \text{th } \theta. \quad (1.5)$$

Wichtig an dieser Beziehung ist für spätere Interpretationen im Zusammenhang mit rapiditätsgeordneten Zuständen (vgl. Abschnitt 2.4.2) die Folgerung  $\theta_1 < \theta_2 \iff v_1 < v_2$ .

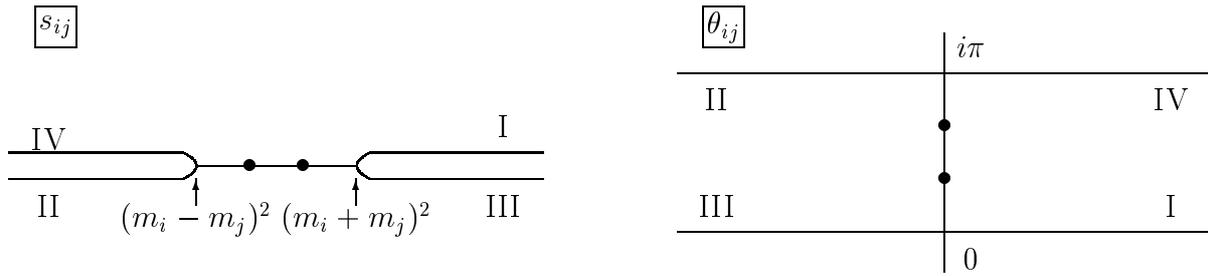


Abbildung 1.1: Analytizitätsbereiche von  $s$  und  $\theta$ . Die Punkte kennzeichnen mögliche Pole der  $S$ -Matrix.

Zusätzlich sollen schon an dieser Stelle einige Formeln festgehalten werden, die gelten, wenn man die Rapidität ins Komplexe fortsetzt, und die später noch wichtig werden. Mit  $\text{sh}(i\pi) = i \sin \pi = 0$  und  $\text{ch}(i\pi) = \cos \pi = -1$  folgt aus den Additionstheoremen für  $\text{ch}$  und  $\text{sh}$  die Gleichung

$$\begin{aligned} p(\theta \pm i\pi) &= (\text{ch}(\theta \pm i\pi), \text{sh}(\theta \pm i\pi)) \\ &= (\text{ch}(\theta)\text{ch}(i\pi) \pm \text{sh}(\theta)\text{sh}(i\pi), \text{sh}(\theta)\text{ch}(i\pi) \pm \text{ch}(\theta)\text{sh}(i\pi)) \\ &= -(\text{ch} \theta, \text{sh} \theta) = -p(\theta). \end{aligned}$$

Die Mandelstamvariablen können dann nach Anwendung einiger Additionstheoreme für die hyperbolischen Funktionen in einfacher und symmetrischer Weise durch die entsprechenden Rapiditäten  $\alpha_i$  (zu  $p_i$ ) ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned} s &= (p_a + p_b)^2 = m_a^2 + m_b^2 + 2m_a m_b (\text{ch} \alpha_a \text{ch} \alpha_b - \text{sh} \alpha_a \text{sh} \alpha_b), \\ &= m_a^2 + m_b^2 + 2m_a m_b \text{ch}(\alpha_a - \alpha_b) \\ t &= (p_a - p_c)^2 = m_a^2 + m_c^2 - 2p_a p_c = m_a^2 + m_c^2 - 2m_a m_c \text{ch}(\alpha_a - \alpha_c), \\ u &= (p_a - p_d)^2 = m_a^2 + m_d^2 - 2p_a p_d = m_a^2 + m_d^2 - 2m_a m_d \text{ch}(\alpha_a - \alpha_d). \end{aligned} \quad (1.6)$$

### 1.3.2 Faktorisierung der $S$ -Matrix und erste Folgerungen

Integrable Modelle in der Feldtheorie sind dadurch ausgezeichnet, daß sie unendlich viele Erhaltungsgrößen besitzen<sup>1</sup>. Dies hat drei weitreichende Konsequenzen (vgl. [10]):

1. Die  $S$ -Matrix faktorisiert, d.h. läßt sich als Produkt von Zweiteilchen-Streumatrizen schreiben.
2. Die Teilchenzahl ist erhalten.
3. Die Impulse sind einzeln erhalten, nicht nur der Gesamtimpuls.

Die drei genannten Punkte rechtfertigen die in integrablen Modellen gebräuchliche Schreibweise

$$\begin{aligned} |(p_1, \epsilon_1), \dots, (p_n, \epsilon_n)\rangle^{in} &= S_{\epsilon_1 \dots \epsilon_n}^{(n) \epsilon'_1 \dots \epsilon'_n}(p_1, \dots, p_n) |(p_1, \epsilon'_1), \dots, (p_n, \epsilon'_n)\rangle^{out} \\ &= (\sigma^{(n)} S^{(n)})_{\epsilon_1 \dots \epsilon_n}^{\epsilon'_1 \dots \epsilon'_n}(p_1, \dots, p_n) |(p_n, \epsilon'_n), \dots, (p_1, \epsilon'_1)\rangle^{out}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

<sup>1</sup>Das entspricht der Aussage, daß Systeme integrabel sind, wenn sie ebenso viele Erhaltungsgrößen wie Freiheitsgrade besitzen. In Feldtheorien existieren unendlich viele Freiheitsgrade.

Die Matrix  $\sigma^{(n)}$  berücksichtigt die Statistik der Teilchen bei der Vertauschung der Teilchen und ist das Produkt von allen Zweiteilchenmatrizen  $\sigma$ , die für Fermion-Fermion-Vertauschung den Wert  $-1$  und in allen anderen Fällen den Wert  $+1$  liefert. Daß die  $S$ -Matrix faktorisiert, bedeutet dann

$$\sigma^{(n)} S^{(n)}(p_1, \dots, p_n) = \prod_{i < j} \sigma S^{(2)}(p_i, p_j),$$

wobei das Produkt in einer bestimmten Reihenfolge zu nehmen ist (siehe [28]). Die oben genannten Punkte und ihre Konsequenzen sollen jetzt nacheinander – angefangen mit dem letzten – diskutiert werden.

### 1.3.3 Analytizitätsbereiche der $S$ -Matrix

Die Impulse seien einzeln erhalten. Es soll konkret angenommen werden, daß

$$p_a = p_d \quad (\Rightarrow \alpha_a = \alpha_d, m_a = m_d) \quad \text{und} \quad p_b = p_c \quad (\Rightarrow \alpha_b = \alpha_c, m_b = m_c).$$

Für die Mandelstamvariablen folgt daher nach (1.6) und mit  $\theta_{ab} := \alpha_a - \alpha_b = \alpha_c - \alpha_d$

$$\begin{aligned} s &= m_a^2 + m_b^2 + 2m_a m_b \operatorname{ch} \theta_{ab}, \\ t &= m_a^2 + m_b^2 - 2m_a m_b \operatorname{ch} \theta_{ab} = 2(m_a^2 + m_b^2) - s, \\ u &= 0. \end{aligned}$$

Diesen Beziehungen sind mehrere Folgerungen zu entnehmen:

- (a) Von den drei Mandelstamvariablen ist nur noch eine frei wählbar. Alle anderen sind durch sie bestimmt. Wir wollen in Zukunft immer  $s$  als unabhängige Variable verwenden.
- (b) Zur Abkürzung führen wir die Mengen  $M^+ = \{x | x > (m_a + m_b)^2\}$  und  $M^- = \{x | x < (m_a - m_b)^2\}$  ein. Nach Abschnitt 1.2 gilt für physikalische Prozesse im  $s$ -Kanal  $s \in M^+ + i0$  bzw. im  $t$ -Kanal  $s \in M^- - i0$  ( $\Leftrightarrow t \in M^+ + i0$ ). Die erste Bedingung ist nur erfüllbar<sup>2</sup> für  $\theta \in \mathbb{R}$ , die zweite für  $\theta \in \mathbb{R} + i\pi$ .
- (c) Der Bereich  $M^+$  wird zweimal von  $s$  überdeckt, wenn  $\theta_{ab}$  die reellen Zahlen durchläuft. Der physikalische Bereich im  $s$ -Kanal ist jedoch nur  $s \in M^+ + i0$ , d.h. nur der Bereich  $\theta_{ab} > 0$  entspricht physikalischen Werten. Analoges gilt für den  $t$ -Kanal.

Das eben gesagte ist in Abbildung 1.1 veranschaulicht. Wie die Nomenklatur dort andeutet, wählen wir die Blätter so, daß die Zuordnungen gelten, die in Tabelle 1.1 zusammengestellt sind. Im physikalischen Bereich von  $s$ , muß die  $S$ -Matrix nach c) als Funktion von  $|\theta_{ab}|$  bzw.  $i\pi - |\theta_{ab}|$  aufgefaßt werden. Die dargestellte  $s$ -Ebene mit den Verzweigungsschnitten bei  $M^\pm$  wird als physikalisches Blatt, der Streifen  $\operatorname{Im} \theta \in (0, \pi)$  als physikalischer Streifen bezeichnet. Im Fall von integrablen Modellen wird im weiteren stets angenommen, daß die  $S$ -Matrix „maximal analytisch“ ist, d.h. alle Pole im physikalischen Blatt sind physikalisch bedingt, insbesondere liegen sie isoliert. Es stellt sich

<sup>2</sup>Modulo der Periodizität der  $\operatorname{ch}$ -Funktion.

Tabelle 1.1: Analytizitätsbereiche in  $s$ - und  $\theta$ -Ebene und ihre Korrespondenz.

Bereich	$\theta_{ab}$ -Bereich	$s$ -Bereich
I	$\theta_{ab} =  \theta_{ab}  \in \mathbb{R}_+$	$s \in M^+ + i0$
II	$\theta_{ab} = i\pi -  \theta_{ab}  \in \mathbb{R}_- + i\pi$	$s \in M^- - i0$
III	$\theta_{ab} = - \theta_{ab}  \in \mathbb{R}_-$	$s \in M^+ - i0$
IV	$\theta_{ab} = i\pi +  \theta_{ab}  \in \mathbb{R}_+ + i\pi$	$s \in M^- + i0$

die Frage, ob es konkrete Gleichungen gibt, die das Aussehen der analytisch fortgesetzten  $S$ -Matrix beschreiben. Aufgrund der Hermitizität des Hamiltonoperators ist die  $S$ -Matrix reell analytisch. Dies besagt für einen physikalischen Prozeß (also  $s \in M^+$ )

$$S(s - i0) = S^\dagger(s + i0) \quad \longleftrightarrow \quad S(-|\theta_{ab}|) = S^\dagger(|\theta_{ab}|).$$

Im Zuge der analytischen Fortsetzung dieser Gleichung für alle Werte von  $\theta$  erhält man unter Ausnutzung der Unitarität die Relation

$$S(-\theta) = S^\dagger(\theta) = S^{-1}(\theta).$$

Hierbei spielt die angenommene maximale Analytizität eine wichtige Rolle, damit überhaupt in einen genügend großen Bereich analytisch fortgesetzt werden kann.

Für Modelle mit Fermionen ist es sinnvoll, eine Hilfs- $S$ -Matrix  $\dot{S}$  zu definieren:

$$\dot{S}(\theta) = \sigma S(\theta). \quad (1.8)$$

Offensichtlich hat sie die gleichen analytischen Eigenschaften wie die ursprüngliche  $S$ -Matrix, d.h. es gilt insbesondere  $\dot{S}(-\theta) = \dot{S}^{-1}(\theta)$ . In Gleichungen heben sich die  $\sigma$ 's oft heraus. Wenn keine Mißverständnisse auftreten können, soll auch diese Hilfs- $S$ -Matrix  $\dot{S}$  kürzer als  $S$ -Matrix bezeichnet werden, da später fast ausschließlich sie Verwendung finden wird.

### 1.3.4 Formalisierung und graphische Notation

Im Hinblick auf den Zusammenhang mit Quantengruppen und eine graphische Notation soll in diesem Abschnitt ein etwas formalerer Zugang zur  $S$ -Matrix entwickelt werden. Seien dazu für alle Indizes  $i$  die  $V^i \cong \mathbb{C}^N$  Vektorräume, die als Darstellungsräume für die Teilchenmultipletts aufgefaßt werden. Wir definieren weiter den Raum  $V^{1\dots n} = V^1 \otimes \dots \otimes V^n$ . Der Raum  $V_i$  sei der Dualraum zu  $V^i$ . Es muß betont werden, daß zwei Räume  $V^i$  und  $V^j$  zwar isomorph sind, aber trotzdem unterschieden werden müssen, da in Zukunft jedem dieser Räume eindeutig eine Rapidität zugeordnet werden soll.

Die Hilfs- $S$ -Matrix soll im weiteren als Operator

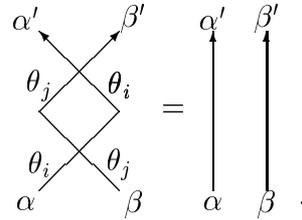
$$\dot{S}_{ij}(\theta) : V^i \otimes V^j \longrightarrow V^j \otimes V^i$$

aufgefaßt werden. Dabei wollen wir die graphische Notation

$$\dot{S}_{ij}(\theta_i - \theta_j) = \begin{array}{c} V^j \quad V^i \\ \theta_i \quad \theta_j \\ V^i \quad V^j \end{array} \quad [\dot{S}_{ij}(\theta_i - \theta_j)]_{\alpha\beta}^{\beta'\alpha'} = \begin{array}{c} \beta' \quad \alpha' \\ \theta_i \quad \theta_j \\ \alpha \quad \beta \end{array} \quad (1.9)$$

verwenden, bei der jeder geraden Linie und damit jedem der Räume eine Rapidität zugeordnet ist. Überkreuzen sich zwei Linien, symbolisiert dies eine  $S$ -Matrix mit der Differenz der Rapiditäten als Argument. Diese Interpretation ist nur möglich, da die Impulse bzw. Rapiditäten einzeln erhalten bleiben. Später wird die  $S$ -Matrix  $\dot{S}_{ij}$  als Operator im Raum  $V^{1\dots n}$  aufgefaßt. Sie wirkt dann trivial auf allen Räumen ungleich  $V^i, V^j$ . Mit diesen Festsetzungen besagt z.B. die Unitarität

$$\dot{S}_{ij}(\theta_i - \theta_j)\dot{S}_{ji}(\theta_j - \theta_i) = \mathbf{1}$$



Über innere Linien wird dabei summiert!

### 1.3.5 Crossing-Symmetrie

In Abschnitt 1.2 haben wir festgestellt, daß die  $S$ -Matrix eine Symmetrie bezüglich der Ersetzung Teilchen  $\rightarrow$  Antiteilchen und der analytischen Fortsetzung  $s \in M^+ + i0 \rightarrow s \in M^- - i0$  besitzt. Nach Abbildung 1.1 entspricht das in der  $\theta$ -Ebene für physikalische Werte von  $\theta$ , d.h. für  $\theta = |\theta_1 - \theta_2| \in \mathbb{R}_+$ , dem Übergang  $\theta \rightarrow i\pi - \theta$ . Anders gesprochen geht man von Bereich I in Bereich II über. Für physikalische Werte ( $\theta \in \mathbb{R}_+$ ) lautet die Crossing-Relation im  $\theta$ -Raum in der alten Schreibweise

$$\dot{S}_{\alpha\beta}^{\beta'\alpha'}(\theta) = \dot{S}_{\beta'\alpha}^{\alpha'\beta}(i\pi - \theta) = \dot{S}_{\beta\alpha'}^{\alpha\beta'}(i\pi - \theta).$$

Auch diese Relation setzen wir unter Ausnutzung der maximalen Analytizität auf das ganze physikalische Blatt fort. Um eine Formulierung in der neuen Notation zu erhalten, führen wir die Ladungskonjugationsmatrizen

$$[\mathbf{C}_{12}]_{\mu\nu} = \delta_{\mu\bar{\nu}} \quad \text{und} \quad [\mathbf{C}^{12}]^{\mu\nu} = \delta^{\mu\bar{\nu}}$$

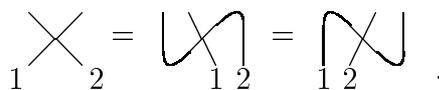
ein<sup>3</sup>. Dann gilt

$$\dot{S}_{12}(\theta_{12}) = \mathbf{C}^{22}\dot{S}_{21}(i\pi - \theta_{12})\mathbf{C}_{22} = \mathbf{C}^{11}\dot{S}_{2\bar{1}}(i\pi - \theta_{12})\mathbf{C}_{\bar{1}1}.$$

Verbindet man mit den Ladungskonjugationsmatrizen die graphische Notation

$$\mathbf{C}_{\mu\nu} = \alpha \int_{\mu}^{\nu} \alpha - i\pi \quad \mathbf{C}^{\mu\nu} = \alpha \int_{\alpha}^{\nu} \alpha + i\pi,$$

so lassen sich die Crossing-Relationen darstellen über



<sup>3</sup>Die Ladungskonjugationsmatrizen können auch komplizierter aussehen. Für die Modelle, die in dieser Arbeit behandelt werden, ist diese Festsetzung jedoch korrekt.

### 1.3.6 Die Yang-Baxter-Gleichung

Wie weiter oben bereits festgestellt wurde, bedeutet Faktorisierung der  $S$ -Matrix, daß sich ein Streuprozeß von  $n$  Teilchen so darstellen läßt, daß nacheinander jeweils zwei Teilchen miteinander streuen. Die Reihenfolge der Streuungen ist dabei a priori nicht eindeutig festgelegt ist. Betrachte zum Beispiel die folgenden zwei Diagramme ein und desselben Streuprozesses:

$$(1.10)$$

Daß sie den gleichen Prozeß beschreiben, liegt an der Tatsache, daß die Symmetrieoperationen, die mit den höheren erhaltenen Ladungen der integrablen Theorie verbunden sind, es erlauben, die Linien in der dargestellten Weise zu verschieben. In Formeln ausgeschrieben bedeutet dies mit  $\theta_{ij} = \theta_i - \theta_j$

$$\dot{S}_{12}(\theta_{12})\dot{S}_{13}(\theta_{13})\dot{S}_{23}(\theta_{23}) = \dot{S}_{23}(\theta_{23})\dot{S}_{13}(\theta_{13})\dot{S}_{12}(\theta_{12}).$$

Diese Gleichung ist als Yang-Baxter-Gleichung oder auch als „star-triangle-relation“ bekannt. Es wurde vorher bereits festgestellt, daß Faktorisierung die Existenz unendlich vieler Erhaltungsgrößen sichert und damit die Integrabilität des Modells gewährleistet. Daher spielt die Yang-Baxter-Gleichung eine grundlegende Rolle in der Theorie integrabler Modelle in 2 Dimensionen, seien sie Vertexmodelle der statistischen Physik [15, 17, 18, 21, 45] oder integrable Quantenfeldtheorien in 1+1 Dimensionen [14, 16]. So beruhen zum Beispiel alle Bethe-Ansatz-Techniken auf dieser Gleichung. Ein weiteres wichtiges Anwendungsgebiet der durch (1.10) gegebenen sogenannten Yang-Baxter-Algebra ist das Studium von Quantengruppen, also grob gesprochen von Algebren, die gegenüber den klassischen Lie-Algebren  $q$ -deformierten Vertauschungsrelationen genügen und für bestimmte Werte von  $q$  in die klassischen übergehen [11, 12, 13]. In der Knotentheorie ist sie ebenfalls von Bedeutung [19, 48].

### 1.3.7 Gebundene Zustände

Die Zweiteilchen- $S$ -Matrix hat Pole, falls der Gesamtimpuls zweier Teilchen  $i$  und  $j$  auf der Massenschale eines dritten  $k$  liegt, d.h. für

$$s_{ij} = (p_i + p_j)^2 = m_k^2. \quad (1.11)$$

Vergleiche dazu die Propagatoren (1.4). Dies kann so interpretiert werden, daß aus dem virtuellen Teilchen, das in den verschiedenen Feynmangraphen zwei Vertizes verbindet, ein reales Teilchen wird, wenn sein Impuls auf der Massenschale liegt. Diese Pole entsprechen also gebundenen Zuständen. In [30] wurde hergeleitet, wie sich in integrablen Modellen der Quantenfeldtheorie in 1 + 1 Dimensionen aus den  $S$ -Matrizen der Konstituenten die  $S$ -Matrix des gebundenen Zustandes konstruieren läßt, so daß Unitarität, Yang-Baxter-Gleichung und Crossing-Symmetrie erfüllt sind.

Die  $S$ -Matrix läßt sich als Operator  $\dot{S}_{12}(\theta) : V_1 \otimes V_2 \rightarrow V_2 \otimes V_1$  diagonalisieren<sup>4</sup> und hat demnach eine Spektralzerlegung der Form

$$\dot{S}_{12}(\theta) = \sum_e \dot{S}_{(e)}(\theta) P_{12}^{(e)}(\theta),$$

wobei die  $\dot{S}_e(\theta)$  die Eigenwerte zum Eigenraum  $V_e$  sind. Die  $P_{12}^{(e)}(\theta) : V_1 \otimes V_2 \rightarrow V_2 \otimes V_1$  sind die Projektoren auf diese Eigenräume. Die Vektoren der Basis im Eigenraum  $V_e$  sollen mit

$$|e_i\rangle^\theta \quad (i = 1, \dots, \dim V_e)$$

bezeichnet werden. Der Basiswechsel von der ursprünglichen (kanonischen) Basis des Raumes  $V_1 \otimes V_2$  zu einer Basis von Eigenvektoren wird durch die Clebsch-Gordon-Koeffizienten (Intertwiner)  $\phi_{12}^e(\theta) : V_1 \otimes V_2 \rightarrow V_e \subset V_1 \otimes V_2$  vermittelt gemäß (für  $\alpha - \alpha' = \theta$ )

$$|(\beta, e_i)\rangle^\theta = \phi_{\mu\nu}^{e_i}(\theta) |(\alpha, \mu), (\alpha', \nu)\rangle.$$

Die Rapidität  $\beta$  soll durch die Bedingung  $p_{e_i} = p_1 + p_2$  gegeben sein und spielt an dieser Stelle von der algebraischen Struktur her noch keine Rolle (genau wie die Rapiditäten  $\alpha, \alpha'$ ). Zusätzlich zu diesem Satz von Intertwinern gibt es auch noch einen Satz, der den umgekehrten Basiswechsel vermittelt (wobei allerdings die Räume  $V_1, V_2$  vertauscht werden sollen). Werden diese Elemente mit

$$\phi_e^{21} : V_e \subset V_1 \otimes V_2 \rightarrow V_2 \otimes V_1$$

bezeichnet, so gilt offenbar

$$\begin{aligned} [\phi_e^{21}(\theta) \phi_{12}^e(\theta)]_{\mu\nu}^{\nu'\mu'} &= \delta_\mu^{\mu'} \delta_\nu^{\nu'} \\ [\phi_{12}^e(\theta) \phi_e^{21}(\theta)]_\mu^{\mu'} &= \delta_\mu^{\mu'}, \end{aligned} \quad (1.12)$$

wobei jeweils über die (vollständigen) Eigenräume einer bestimmten Darstellung zu summieren ist. Da nur einer der beiden Basiswechsel das Vertauschen der Räume  $V_1, V_2$  beinhaltet, sind diese Relationen asymmetrisch. Später bei der graphischen Darstellung wird dies noch deutlicher werden. Damit haben wir die Gleichung

$$[S_{12}(\theta)]_{\mu\nu}^{\nu'\mu'} = \sum_e \phi_e^{\nu'\mu'}(\theta) S_{(e)}(\theta) \phi_{\mu\nu}^e(\theta),$$

wobei  $\dot{S}_{(e)}(\theta)$  die Einträge der Diagonalmatrix der Eigenwerte sind.

Bisher wurden nur die Bestandteile  $|(\alpha, \mu)\rangle$  und  $|(\alpha, \mu)\rangle$  eines Produktzustandes  $|(\alpha, \mu), (\alpha', \nu)\rangle$  als physikalische Zustände interpretiert. Nun wollen wir für den Fall, daß die Rapiditätsdifferenz  $\alpha - \alpha'$  einem Pol einer der Eigenwerte  $\dot{S}_e(\theta)$  und der Massenschalenbedingung eines Teilchens entspricht<sup>5</sup>, die Vektoren des zugehörigen Eigenraums als

<sup>4</sup>Ein Vektor  $\sum_{i,j} |\alpha_i \beta_j\rangle \neq 0$  heißt hier Eigenvektor, falls ein  $\lambda \in \mathbb{C}$  existiert, so daß  $\dot{S}_{12}(\theta) \sum_{i,j} |\alpha_i \beta_j\rangle = \lambda \sum_{i,j} |\beta_j \alpha_i\rangle$ . Diese Definition trägt der Tatsache Rechnung, daß  $\dot{S}_{12}$  die Räume  $V_1$  und  $V_2$  vertauscht.

<sup>5</sup>Im Zweifelsfall muß dieses Teilchen dann neu in das Modell aufgenommen werden. In einigen Modellen gibt es auch Pole, die gekreuzten Kanälen (engl. crossed channels) entsprechen oder sogar überhaupt keine physikalische Bedeutung haben, also redundant sind. Diesen entsprechen dann natürlich keine neuen Teilchen.



Analoge Diagramme gelten, wenn man Beine simultan umbiegt bzw. – strenger gesprochen – alles mit Ladungskonjugationsmatrizen multipliziert.

In Rapiditäten ausgedrückt lautet die Fusionsbedingung (1.11)

$$m_b^2 = (p_1 + p_2)^2 = m_\mu^2 + m_\nu^2 + 2m_\mu m_\nu \text{ch}(\alpha - \alpha').$$

Dies ist für  $\alpha - \alpha' \in \mathbb{R}$  nicht erfüllbar, wenn gleichzeitig die Impulserhaltung gelten soll. Es stellt sich heraus, daß der Bindungswinkel rein imaginär sein muß. Mögliche physikalische Pole der  $S$ -Matrix sind in Abbildung 1.1 als Punkte dargestellt.

Da die Bindungswinkel immer rein imaginär sind, ist es möglich, die Fusionsprozesse im euklidischen Impulsraum auf einfache Art und Weise darzustellen [49]. Setze dazu

$$p_{eukl.} = (ip^1, p^0) = m(\text{ish } \theta, \text{ch } \theta) = m(\sin i\theta, \cos i\theta).$$

Diese Darstellung hat zwei Vorteile

1. Es gilt  $p_{eukl.} \cdot q_{eukl.} = (ip^1 iq^1) + p^0 q^0 = q^0 p^0 - p^1 q^1 = pq$  und spezieller  $\|\vec{p}_{eukl.}\|^2 = (ip^1)^2 + (p^0)^2 = m^2$ , d.h. die Massenschalenbedingung (1.2) geht in die Bedingung über, daß der zugehörige euklidische Vektor auf einem Kreis mit dem Radius  $m$  liegt.
2. Die rein imaginären Bindungswinkel sind in der neuen Ebene als echte Winkel auf-  
faßbar. Dadurch ist eine einfache graphische Interpretation von Fusionsprozessen möglich.

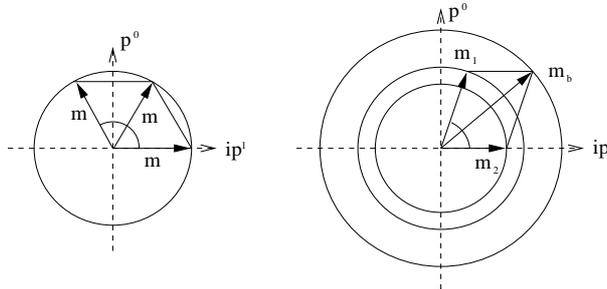


Abbildung 1.2: Darstellung einiger Fusionsprozesse im Impulsraum.

In Abbildung 1.2 sind zwei mögliche Fusionsprozesse dargestellt. Im linken Bild vereinigen sich zwei Teilchen der (gleichen) Masse  $m$  zu einem Teilchen, das wiederum die Masse  $m$  besitzt. Ein derartiger Prozeß tritt zum Beispiel im  $Z(3)$ -Isingmodell auf. Der Bindungswinkel ist in diesem Fall  $\theta_b = \frac{2i\pi}{3}$ , und für die Rapidität des gebundenen Zustands ergibt sich  $\beta = \alpha - \frac{i\pi}{3} = \alpha' + \frac{i\pi}{3}$ . Allgemein gilt bei der Fusion zweier gleichschwerer Teilchen immer  $\beta = \alpha - \frac{1}{2}\theta_b = \alpha' + \frac{1}{2}\theta_b$ . Das rechte Bild stellt einen völlig beliebigen Prozeß dar. Zwei Teilchen, die auf verschiedenen Massenschalen liegen, bilden ein neues Teilchen, das wiederum eine andere Masse hat. Die Rapidität des gebundenen Zustandes läßt sich mittels einfacher geometrischer Überlegungen als Funktion jeder der beiden anderen Rapiditäten aus dem Diagramm ablesen.

Nach [30] gilt für die Streuung, in die ein gebundener Zustand involviert ist, bis auf unbestimmte Phasen die sogenannte Bootstrap-Gleichung

$$\dot{S}_{(12)3}(\theta_{(12)3})\eta_{12}^{(12)} = \eta_{12}^{(12)} \dot{S}_{13}(\theta_{13})\dot{S}_{23}(\theta_{23})\Big|_{\theta_{12}=\theta_{12}^{(12)}}.$$

Sie hat die Darstellung

$$\begin{array}{c} \diagup \\ \bullet \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \bullet \\ \diagup \\ \diagdown \end{array} = \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \\ \bullet \\ \text{---} \\ \bullet \\ \diagup \\ \diagdown \end{array} \quad \text{bzw.} \quad \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \\ \diagup \\ \diagdown \end{array} = \begin{array}{c} \diagup \\ \bullet \\ \diagdown \\ \bullet \\ \diagup \\ \diagdown \end{array}$$

und soll hier nicht hergeleitet werden. Allerdings zeigen die Abbildungen

$$\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \\ \diagup \\ \diagdown \end{array} = \begin{array}{c} \diagup \\ \bullet \\ \diagdown \\ \bullet \\ \diagup \\ \diagdown \end{array} = \begin{array}{c} \diagup \\ \bullet \\ \diagdown \\ \bullet \\ \diagup \\ \diagdown \end{array} = \begin{array}{c} \diagup \\ \bullet \\ \diagdown \\ \bullet \\ \diagup \\ \diagdown \end{array} = \begin{array}{c} \diagup \\ \bullet \\ \diagdown \\ \bullet \\ \diagup \\ \diagdown \end{array} = \begin{array}{c} \diagup \\ \bullet \\ \diagdown \\ \bullet \\ \diagup \\ \diagdown \end{array}$$

daß diese Beziehung konsistent ist mit der Erfüllung von Unitarität und Yang-Baxter-Gleichung. Die Bootstrap-Gleichung steht in engem Zusammenhang mit der Fusion von Darstellungen von Quantengruppen (vgl. [48] und [50]).

### 1.4 Zusammenstellung der S-Matrix-Axiome

In der folgenden Definition sind noch einmal alle Eigenschaften zusammengefaßt, die eine S-Matrix in integrablen Modellen in 1 + 1 Dimensionen besitzen muß.

**Definition 1 (S-Matrix-Axiome).** Seien die  $V^i \cong \mathbb{C}^N$  Vektorräume, die von den verschiedenen Teilchen eines integrablen Modells aufgespannt und als Darstellungsräume für die jeweiligen Multipletts aufgefaßt werden. Die Abbildung  $\dot{S}_{ij}(\theta) : V^i \otimes V^j \rightarrow V^j \otimes V^i$  heißt Zweiteilchen-Hilfs-S-Matrix, falls sie folgende Eigenschaften besitzt:

- 1. Unitarität:

$$\dot{S}_{12}(\theta_{12})\dot{S}_{21}(\theta_{21}) = \mathbf{1}. \tag{1.15}$$

$$\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \\ \diagup \\ \diagdown \end{array} = \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \\ \diagup \\ \diagdown \end{array}$$

- 2. Crossing-Symmetrie:

$$\dot{S}_{12}(\theta_{12}) = \mathbf{C}^{22}\dot{S}_{21}(i\pi - \theta_{12})\mathbf{C}_{22} = \mathbf{C}^{11}\dot{S}_{21}(i\pi - \theta_{12})\mathbf{C}_{11}. \tag{1.16}$$

$$\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \\ \diagup \\ \diagdown \end{array} = \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \\ \diagup \\ \diagdown \end{array} = \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \\ \diagup \\ \diagdown \end{array}$$

- 3. Yang-Baxter-Gleichung:

$$\dot{S}_{12}(\theta_{12})\dot{S}_{13}(\theta_{13})\dot{S}_{23}(\theta_{23}) = \dot{S}_{23}(\theta_{23})\dot{S}_{13}(\theta_{13})\dot{S}_{12}(\theta_{12}). \tag{1.17}$$

$$\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \\ \diagup \\ \diagdown \end{array} = \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \\ \diagup \\ \diagdown \end{array}$$

4. Maximale Analytizität:

Alle Pole von  $\dot{S}$  im physikalischen Streifen besitzen eine physikalische Interpretation<sup>6</sup>.

5. Polstruktur:

$\dot{S}$  hat einfache Pole bei den Bindungswinkeln  $\theta_{12}^{(12)}$ , die zu den Fusionsprozessen  $12 \rightarrow (12)$  gehören. Für physikalische Pole im  $s$ -Kanal gilt

$$i \operatorname{Res}_{\theta_{12}=\theta_{12}^{(12)}} \dot{S}_{12}(\theta_{12}) = i \phi_{(12)}^{21} \dot{R}_{(12)} \phi_{12}^{(12)} = \eta_{(12)}^{21} \eta_{12}^{(12)}. \quad (1.18)$$

Graphisch haben wir

$$i \operatorname{Res}_{\theta_{12}=\theta_{12}^{(12)}} \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \\ 1 \quad 2 \end{array} = i \dot{R}_{(12)} \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \\ 1 \quad 2 \end{array} \begin{array}{c} (12) \\ | \\ (12) \end{array} = \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \diagdown \\ \bullet \\ \diagdown \diagup \\ 1 \quad 2 \end{array} \Big|_{\theta_{12}=\theta_{12}^{(12)}}.$$

Pole im  $t$ -Kanal lassen sich mittels der Crossing-Symmetrie auf diesen Fall zurückführen.

6. Bootstrap-Gleichung:

$$\dot{S}_{(12)3}(\theta_{(12)3}) \eta_{12}^{(12)} = \eta_{12}^{(12)} \dot{S}_{13}(\theta_{13}) \dot{S}_{23}(\theta_{23}) \Big|_{\theta_{12}=\theta_{12}^{(12)}}. \quad (1.19)$$

Diese Gleichung kann graphisch dargestellt werden über

$$\begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \diagdown \\ \bullet \\ \diagdown \diagup \\ 1 \quad 2 \quad 3 \end{array} = \begin{array}{c} \bullet \\ \diagdown \diagup \\ \bullet \\ \diagup \diagdown \\ 1 \quad 2 \quad 3 \end{array}.$$

Sie soll darüber hinaus aus allen Richtungen gelten.

7. Gültigkeit des Bootstrap-Bildes für die erweiterten Intertwiner:

$$\eta_{\mu\nu}^{\sigma} = \eta_{\nu\bar{\sigma}}^{\bar{\mu}} = \eta_{\bar{\sigma}\mu}^{\bar{\nu}} = \eta_{\mu}^{\sigma\bar{\nu}} = \eta_{\nu}^{\bar{\mu}\sigma} = \eta_{\bar{\sigma}}^{\bar{\nu}\bar{\mu}}. \quad (1.20)$$

Diese Gleichungen können graphisch dargestellt werden über

$$\begin{array}{c} (12) \\ \bullet \\ \diagup \diagdown \\ 1 \quad 2 \end{array} = \begin{array}{c} (12) \\ \bullet \\ \diagup \diagdown \\ 1 \quad 2 \end{array} \begin{array}{c} (12) \\ | \\ (12) \end{array} = \begin{array}{c} (12) \\ \bullet \\ \diagdown \diagup \\ 1 \quad 2 \end{array} \begin{array}{c} (12) \\ | \\ (12) \end{array} = \begin{array}{c} (12) \\ \bullet \\ \diagup \diagdown \\ 1 \quad 2 \end{array} \begin{array}{c} (12) \\ | \\ (12) \end{array} = \begin{array}{c} (12) \\ \bullet \\ \diagdown \diagup \\ 1 \quad 2 \end{array} \begin{array}{c} (12) \\ | \\ (12) \end{array} = \begin{array}{c} (12) \\ \bullet \\ \diagup \diagdown \\ 1 \quad 2 \end{array} \begin{array}{c} (12) \\ | \\ (12) \end{array}$$

und garantieren zusammen mit der Unitarität, der Yang-Baxter- und der Bootstrap-Gleichung, daß vielfältige graphische Manipulationen vorgenommen werden können. Es gibt weitere dieser Relationen, die hier nicht aufgeführt sind.

---

<sup>6</sup>Diese Bedingung sichert die Eindeutigkeit der Lösungen. Unter Umständen können auch sogenannte CCD-Pole auftreten, die keine physikalische Bedeutung haben.

# Kapitel 2

## Formfaktoren

### 2.1 Definition und Herleitung einiger Eigenschaften

#### 2.1.1 Definition der Formfaktoren

Sei  $\mathcal{O}(x)$  ein lokaler skalarer Operator<sup>1</sup>. Dann definieren wir die kovektorwertige Funktion

$$F_{\epsilon_1 \dots \epsilon_n}^{\mathcal{O}}(s_{ij} + i0 | 1 \leq i < j \leq n) = \langle 0 | \mathcal{O}(0) | (p_1, \epsilon_1), \dots, (p_n, \epsilon_n) \rangle^{in}, \quad (2.1)$$

die nur von den Mandelstamvariablen  $s_{ij} = (p_i + p_j)^2$  abhängt. Die Beschreibung mit  $+i0$  soll darauf hindeuten, daß wir es mit den Randwerten von analytischen Funktionen zu tun haben. Daß ausgerechnet ein  $+i0$  auftritt, liegt an der Tatsache, daß Matrixelemente mit in-Zuständen betrachtet wurden. Wir wollen diese Funktionen in Zukunft Formfaktoren nennen. Durch eine Translation des Operators erhält man die Gleichung

$$\langle 0 | \mathcal{O}(x) | (p_1, \epsilon_1), \dots, (p_n, \epsilon_n) \rangle^{in} = e^{-ix \sum_i p_i} F_{\epsilon_1 \dots \epsilon_n}^{\mathcal{O}}(s_{ij} + i0 | 1 \leq i < j \leq n).$$

Es wird im weiteren angenommen, daß die Formfaktoren „maximale Analytizität“ besitzen, d.h. alle Pole im physikalischen Blatt physikalischen Ursprungs sind. Nach Abschnitt 1.2 entspricht der Übergang von in- zu out-Zuständen gerade der Ersetzung  $s_{ij} + i0 \rightarrow s_{ij} - i0$ . Da die Singularitäten wegen der maximalen Analytizität vor allem auch isoliert und die Bereiche  $s_{ij} + i0$  sowie  $s_{ij} - i0$  daher analytisch miteinander verbunden sind, gilt

$$F_{\epsilon_1 \dots \epsilon_n}^{\mathcal{O}}(s_{ij} - i0 | 1 \leq i < j \leq n) = \langle 0 | \mathcal{O}(0) | (p_1, \epsilon_1), \dots, (p_n, \epsilon_n) \rangle^{out}.$$

In Verallgemeinerung der oben angeführten Definition setzen wir

$$F_{\mu_1 \dots \mu_n}^{\mathcal{O} \nu_1 \dots \nu_m}(s_{pp} + i0, t_{pq} - i0, s_{qq} + i0) = {}^{out} \langle (q_m, \nu_m), \dots, (q_1, \nu_1) | \mathcal{O}(0) | (p_1, \mu_1), \dots, (p_n, \mu_n) \rangle^{in}, \quad (2.2)$$

wobei  $s_{pp}/s_{qq}$  als Abkürzung für alle Mandelstam-Variablen  $(p_i + p_j)^2$  bzw.  $(q_i + q_j)^2$  und analog  $t_{pq}$  anstelle aller möglichen  $(p_i - q_j)^2$  verwendet wurde. Daß dieser verallgemeinerte Formfaktor diese Abhängigkeit von den Mandelstamvariablen besitzt, ist ein Vorgriff auf Gleichung (2.5). Mit der Schreibweise  $t_{pq} - i0$  ist gemeint, daß  $s_{pq}$  im Sinne von Abbildung 1.1 Werte im Bereich II annimmt.

---

<sup>1</sup>Wir wollen uns hier und im folgenden auf bosonische Operatoren beschränken.

### 2.1.2 Crossing-Relationen

In diesem Abschnitt sollen einige Eigenschaften über die analytische Fortsetzung der Formfaktoren bewiesen werden. Betrachte zunächst das Matrixelement  $\langle (p_1, \epsilon_1) | \mathcal{O}(x) | (p_2, \epsilon_2) \rangle$ . Die zweidimensional angepaßte LSZ-Reduktionsformel (A.2) aus Satz 35 im Anhang liefert

$$\begin{aligned} \langle (p_1, \mu_1) | \mathcal{O}(x) | (p_2, \mu_2) \rangle &= \langle 0 | \mathcal{O}(x) | 0 \rangle \langle (p_1, \mu_1) | (p_2, \mu_2) \rangle \\ &\quad - i \int d^2y e^{ip_1 y} \langle 0 | \mathcal{T}[\mathcal{O}(x) \mathcal{K} \phi_{\mu_1}(y)] | (p_2, \mu_2) \rangle. \end{aligned}$$

Ein Beitrag zu einem beliebigen Matrixelement  $\langle \dots | \mathcal{O}(x) | p_1 \dots \rangle$  soll „nichtzusammenhängend“ bezüglich  $p_1$  heißen, falls der Support als Distribution bezüglich  $p_1$  punktartig ist. Ist er der Randwert einer analytischen Funktion in den Variablen  $s_{1j}$ , so soll er „zusammenhängend“ genannt werden<sup>2</sup>. Der erste Term auf der rechten Seite der Gleichung ist nichtzusammenhängend, der andere zusammenhängend. Analog folgt aus der LSZ-Reduktionsformel (A.3)

$$\langle 0 | \mathcal{O}(x) | (p_1, \bar{\mu}_1), (p_2, \mu_2) \rangle^{in} = -i \int d^2y e^{-ip_1 y} \langle 0 | \mathcal{T}[\mathcal{O}(x) \mathcal{K} \phi_{\mu_1}(y)] | (p_2, \mu_2) \rangle.$$

Per analytischer Fortsetzung kann in der letzten Gleichung  $p_1$  durch  $-p_1$  ersetzt werden, wobei sich zeigt, daß dieses Matrixelement dem zusammenhängenden Anteil des weiter oben betrachteten entspricht. Drückt man das analytisch fortgesetzte Matrixelement über einen Formfaktor aus, so nimmt  $s_{12}$  in Abbildung 1.1 Werte im Bereich II an. Wir schreiben daher etwas unpräzise, aber anschaulich  $t_{12} - i0$  als Argument in den Formfaktor. Mit dieser Vereinbarung gilt nach (2.1)

$$F_{\bar{\mu}_1 \mu_2}^{\mathcal{O}}(t_{12} - i0) = \langle 0 | \mathcal{O}(0) | (-p_1, \bar{\mu}_1), (p_2, \mu_2) \rangle^{in} = \langle (p_1, \mu_1) | \mathcal{O}(0) | (p_2, \mu_2) \rangle_{zush.} \quad (2.3)$$

Wir wollen jetzt versuchen, dieses Ergebnis zu verallgemeinern. Dabei gelte

$$\{p_1, \dots, p_n\} \cap \{q_1, \dots, q_m\} = \emptyset. \quad (2.4)$$

Dann folgt aus einer iterativen Anwendung von (A.3) die Gleichung<sup>3</sup>

$$\begin{aligned} \langle 0 | \mathcal{O}(x) | (q_m, \nu_m), \dots, (q_1, \nu_1), (p_1, \mu_1), \dots, (p_n, \mu_n) \rangle^{in} &= (-i)^n \int d^2y_1 \dots \int d^2y_m \\ &\quad e^{-iq_1 y_1} \dots e^{-iq_m y_m} \langle 0 | \mathcal{T}[\mathcal{O}(x) \mathcal{K} \phi_{\bar{\nu}_1}(y_1) \dots \mathcal{K} \phi_{\bar{\nu}_m}(y_m)] | (p_1, \mu_1), \dots, (p_n, \mu_n) \rangle^{in}. \end{aligned}$$

Aus (A.2) folgt umgekehrt unter Berücksichtigung von (2.4)

$$\begin{aligned} {}^{out} \langle (q_m, \nu_m), \dots, (q_1, \nu_1) | \mathcal{O}(x) | (p_1, \mu_1), \dots, (p_n, \mu_n) \rangle^{in} &= (-i)^n \int d^2y_1 \dots \int d^2y_m \\ &\quad e^{+iq_1 y_1} \dots e^{+iq_m y_m} \langle 0 | \mathcal{T}[\mathcal{O}(x) \mathcal{K} \phi_{\nu_1}(y_1) \dots \mathcal{K} \phi_{\nu_m}(y_m)] | (p_1, \mu_1), \dots, (p_n, \mu_n) \rangle^{in}. \end{aligned}$$

<sup>2</sup>Ein Beitrag kann in diesem Sinne gleichzeitig zusammen- und nichtzusammenhängend sein. Hat die analytische Funktion zum Beispiel am Rand einen Pol, so erhält man unter Verwendung der Formel  $\frac{1}{x \pm i0} = \frac{\mathcal{P}}{x} \mp i\pi\delta(x)$  einen singulären Anteil [40].

<sup>3</sup>Diese Gleichung gilt sogar für beliebige Quantenzahlen.

Für beliebige Quantenzahlen gilt diese Gleichung immer noch, wenn man statt des vollständigen Matrixelementes den zusammenhängenden Anteil schreibt. Wir haben also unter Verwendung der Definition (2.1) die Gleichung

$$\begin{aligned} & {}^{out}\langle (q_m, \nu_m), \dots, (q_1, \nu_1) | \mathcal{O}(x) | (p_1, \mu_1), \dots, (p_n, \mu_n) \rangle_{zush.}^{in} \\ &= \langle 0 | \mathcal{O}(x) | (-q_m, \bar{\nu}_m), \dots, (-q_1, \bar{\nu}_1), (p_1, \mu_1), \dots, (p_n, \mu_n) \rangle^{in} \\ &= F_{\bar{\nu}_m \dots \bar{\nu}_1 \mu_1 \dots \mu_n}^{\mathcal{O}}(s_{pp} + i0, t_{pq} - i0, s_{qq} + i0) \end{aligned}$$

herleiten können. Dies soll nochmal in einem Satz festgehalten werden.

**Satz 1 (Crossing-Relation).**

Allgemeine Matrixelemente sind im Fall  $\{(p_i, \epsilon_i)\} \cap \{(q_i, \nu_i)\} = \emptyset$  über die Beziehung

$$\begin{aligned} & F_{\bar{\nu}_m \dots \bar{\nu}_1 \mu_1 \dots \mu_n}^{\mathcal{O}}(s_{pp} + i0, t_{pq} - i0, s_{qq} + i0) \\ &= {}^{out}\langle (q_m, \nu_m), \dots, (q_1, \nu_1) | \mathcal{O}(x) | (p_1, \mu_1), \dots, (p_n, \mu_n) \rangle^{in} \end{aligned} \quad (2.5)$$

mit den Formfaktorfunktionen verknüpft. Ist die oben genannte Bedingung nicht erfüllt, gilt die Gleichung für den zusammenhängenden Anteil des Matrixelementes.

### 2.1.3 Die Watsongleichung

Es stellt sich die Frage, ob es eine einfache Beziehung zwischen den Funktionswerten von  $F$  für  $s_{ij} + i0$  bzw.  $s_{ij} - i0$  gibt. Für  $n = 2$  ist diese Frage leicht zu beantworten. Durch Einschleiben eines vollständigen Orthonormalsystems von out-Zuständen erhält man nach (2.1)

$$\begin{aligned} F_{\epsilon_1 \epsilon_2}^{\mathcal{O}}(s_{12} + i0) &= \langle 0 | \mathcal{O}(0) | (p_1, \epsilon_1), (p_2, \epsilon_2) \rangle^{in} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \sum_{\{\nu\}} \int \frac{d\vec{q}_1}{4\pi\omega_{\vec{q}_1}} \dots \frac{d\vec{q}_m}{4\pi\omega_{\vec{q}_m}} \\ & \langle 0 | \mathcal{O}(0) | (q_1, \nu_1), \dots, (q_m, \nu_m) \rangle^{out} \cdot {}^{out}\langle (q_m, \nu_m), \dots, (q_1, \nu_1) | (p_1, \epsilon_1), (p_2, \epsilon_2) \rangle^{in}. \end{aligned}$$

Aufgrund der speziellen Eigenschaft integrierbarer Modelle, daß die Teilchenzahl und die Einzelimpulse bei der Streuung erhalten bleiben, folgt sofort

$$F_{\epsilon_1 \epsilon_2}^{\mathcal{O}}(s_{12} + i0) = F_{\nu_2 \nu_1}^{\mathcal{O}}(s_{12} - i0) \dot{S}_{\epsilon_1 \epsilon_2}^{\nu_2 \nu_1}(s_{12} + i0). \quad (2.6)$$

Dies ist die sogenannte Watsongleichung (siehe [51]) im Spezialfall einer integrierbaren Quantenfeldtheorie. Aus Gleichung (2.3) erhält man analog

$$\begin{aligned} F_{\epsilon_1 \epsilon_2}^{\mathcal{O}}(t_{12} - i0) &= \langle (p_1, \bar{\epsilon}_1) | \mathcal{O}(0) | (p_2, \epsilon_2) \rangle_{zush.} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \sum_{\{\nu\}} \int \frac{d\vec{q}_1}{4\pi\omega_{\vec{q}_1}} \dots \frac{d\vec{q}_m}{4\pi\omega_{\vec{q}_m}} \\ & \langle (p_1, \bar{\epsilon}_1) | \mathcal{O}(0) | (q_1, \nu_1), \dots, (q_m, \nu_m) \rangle_{zush.}^{out} \cdot {}^{out}\langle (q_m, \nu_m), \dots, (q_1, \nu_1) | (p_2, \epsilon_2) \rangle = F_{\epsilon_1 \epsilon_2}^{\mathcal{O}}(t_{12} + i0), \end{aligned}$$

da für Einteilchenzustände  $|p\rangle^{in} = |p\rangle^{out}$  ist. Das heißt: Formfaktoren haben zwar wie die  $S$ -Matrizen einen Verzweigungsschnitt bei  $s \pm i0$ , im Gegensatz zu letzteren jedoch nicht bei  $t \pm i0$ .

Diese Ergebnisse sollen in einem nächsten Schritt auf beliebige Anzahlen von Teilchen erweitert werden. Genauer wollen wir die mögliche Diskontinuität am Verzweigungsschnitt

$s_{12} \geq (m_1 + m_2)^2$  diskutieren. Dazu betrachten wir eine Konfiguration der Impulse, bei der  $s_{12}$  in der Nähe des Verzweigungspunktes ist und alle anderen Verzweigungspunkte vermieden werden. Es gelten die LSZ-Reduktionsformeln (A.3) und (A.4) aus dem Anhang A

$$\begin{aligned} & \text{}^{out}\langle (q_m, \nu_m), \dots, (q_1, \nu_1) | \mathcal{O}(x) | (p_1, \mu_1), (p_2, \mu_2) \rangle^{in} \\ &= \text{}^{out}\langle (q_m, \nu_m), \dots, (q_1, \nu_1) | a_{\mu_1}^{out}(\vec{p}_1)^\dagger \mathcal{O}(x) | (p_2, \mu_2) \rangle \\ & \quad - i \int d^2y e^{-ip_1 y} \text{}^{out}\langle (q_m, \nu_m), \dots, (q_1, \nu_1) | \mathcal{T}[\mathcal{O}(x) \mathcal{K} \phi_{\vec{p}_1}(y)] | (p_2, \mu_2) \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{}^{out}\langle (q_m, \nu_m), \dots, (q_1, \nu_1) | \mathcal{O}(x) | (p_1, \mu_1), (p_2, \mu_2) \rangle^{out} \\ &= \text{}^{out}\langle (q_m, \nu_m), \dots, (q_1, \nu_1) | a_{\mu_1}^{in}(\vec{p}_1)^\dagger \mathcal{O}(x) | (p_2, \mu_2) \rangle \\ & \quad + i \int d^2y e^{-ip_1 y} \text{}^{out}\langle (q_m, \nu_m), \dots, (q_1, \nu_1) | \mathcal{T}^*[\mathcal{O}(x) \mathcal{K} \phi_{\vec{p}_1}(y)] | (p_2, \mu_2) \rangle. \end{aligned}$$

Der erste Term in der ersten Gleichung ist offensichtlich nichtzusammenhängend bezüglich  $p_1$ , während dies bei dem ersten Term der zweiten Gleichung im allgemeinen nicht der Fall sein muß. Im speziellen Fall faktorisierender  $S$ -Matrizen, wo die Impulse einzeln erhalten bleiben, ist er jedoch ebenfalls nichtzusammenhängend. Nach Einschieben eines vollständigen Systems von in-Zuständen zwischen dem Erzeugungsoperator und  $\mathcal{O}(x)$  erhält man nämlich

$$\begin{aligned} \sum_{\epsilon_1 \dots \epsilon_l} \frac{1}{l!} \int \frac{d\vec{k}_1}{4\pi\omega_{\vec{k}_1}} \dots \frac{d\vec{k}_l}{4\pi\omega_{\vec{k}_l}} \text{}^{out}\langle (q_m, \nu_m), \dots, (q_1, \nu_1) | a_{\mu_1}^{in}(\vec{p}_1)^\dagger | (k_1, \epsilon_1), \dots, (k_l, \epsilon_l) \rangle^{in} \\ \text{}^{in}\langle (k_l, \epsilon_l), \dots, (k_1, \epsilon_1) | \mathcal{O}(x) | (p_2, \mu_2) \rangle. \end{aligned}$$

Das ist nur von 0 verschieden, falls  $\{q_1, \dots, q_m\} = \{p_1, k_1, \dots, k_l\}$ . Damit sind die zusammenhängenden Beiträge jeweils durch die hinteren Terme gegeben. Durch das Auftreten des Antizeitordnungsoperators  $\mathcal{T}^*$  dreht sich das Vorzeichen bei der  $\pm i0$ -Beschreibung um. Man beachte außerdem, daß der Ket-Vektor im zusammenhängenden Teil der zweiten Gleichung auch als in-Zustand aufgefaßt werden kann. Anwendung der LSZ-Reduktionsformeln ergibt dann

$$\begin{aligned} F_{\vec{\nu}_m \dots \vec{\nu}_1 \mu_1 \mu_2}^{\mathcal{O}}(s_{pp} + i0, t_{pq} - i0, s_{qq} + i0) &= \text{}^{out}\langle (q_m, \nu_m), \dots, (q_1, \nu_1) | \mathcal{O}(x) | (p_1, \mu_1), (p_2, \mu_2) \rangle_{zush.}^{in} \\ F_{\vec{\nu}_m \dots \vec{\nu}_1 \mu_1 \mu_2}^{\mathcal{O}}(s_{pp} - i0, t_{pq} - i0, s_{qq} + i0) &= \text{}^{out}\langle (q_m, \nu_m), \dots, (q_1, \nu_1) | \mathcal{O}(x) | (p_1, \mu_1), (p_2, \mu_2) \rangle_{zush.}^{out}. \end{aligned}$$

Die Matrixelemente lassen sich offenbar durch Multiplikation mit einer Zweiteilchen- $S$ -Matrix ineinander überführen. Damit haben wir die Watsongleichung

$$F_{\vec{\nu}_m \dots \vec{\nu}_1 \mu_1 \mu_2}^{\mathcal{O}}(s_{pp} + i0, t_{pq} - i0, s_{qq} + i0) = F_{\vec{\nu}_m \dots \vec{\nu}_1 \mu'_2 \mu'_1}^{\mathcal{O}}(s_{pp} - i0, t_{pq} - i0, s_{qq} + i0) \dot{S}_{\mu_1 \mu_2}^{\mu'_2 \mu'_1}(s_{pp} + i0).$$

Sie beschreibt in Abbildung 1.1 den Übergang über den Verzweigungsschnitt von I nach III. Analog kann man vorgehen, wenn das Matrixelement am Anfang nur ein Teilchen im Ket-Vektor enthält und man sich mit  $s_{12}$  in der Nähe des  $t$ -Verzweigungsschnittes befindet, während alle anderen Variablen von Verzweigungsschnitten entfernt sind. Da ein Einteilchen-in-Zustand gleichzeitig ein Einteilchen-out-Zustand ist, erhält man so die Gleichung

$$F_{\vec{\nu}_m \dots \vec{\nu}_1 \bar{\mu}_2 \mu_1}^{\mathcal{O}}(t_{pp} - i0, t_{pq} - i0, s_{qq} + i0) = F_{\vec{\nu}_m \dots \vec{\nu}_1 \bar{\mu}_2 \mu_1}^{\mathcal{O}}(t_{pp} + i0, t_{pq} - i0, s_{qq} + i0). \quad (2.7)$$

Der Verzweigungsschnitt bei den Bereichen II und IV existiert also für Formfaktoren im Gegensatz zum Fall der  $S$ -Matrix nicht. Die gleichen Beziehungen gelten unter den geschilderten Voraussetzungen, falls man von beliebigen Matrixelementen ausgeht, da sich alle nicht interessierenden Teilchen mit Hilfe der Crossing-Relationen auf die linke Seite des Matrixelements wechseln lassen.

## 2.2 Rapiditätsabhängige Formfaktoren

### 2.2.1 Definition und Watsongleichung

Bisher wurden die Formfaktoren für die physikalischen Bereiche immer als analytische Funktionen von  $s_{ij} + i0$  betrachtet. Nach Abschnitt 1.3.3 kann man sie dort alternativ als analytische Funktionen von  $|\alpha_{ij}|$  auffassen. Nun sollen Funktionen betrachtet werden, die eng mit den bisherigen Formfaktorfunktionen zusammenhängen, jedoch von den einzelnen Rapiditäten abhängen. Es ist klar, daß die Analytizität in den einzelnen Variablen nicht gegeben ist, wenn man einfach

$$F_{\epsilon_1 \dots \epsilon_n}^{\mathcal{O}}(|\alpha_i - \alpha_j|, 1 \leq i < j \leq n)$$

verwendet, schließlich ist die Funktion  $|\alpha_1 - \alpha_2|$  in den zu betrachtenden Bereichen in keinem der Argumente analytisch. Der kritische Bereich ist offenbar der, wo zwei Rapiditäten gleich werden.

Für bestimmte *feste* Ordnungen der Rapiditäten ist es trotzdem möglich, nach obigem Schema eine in bestimmten Bereichen jeder einzelnen Variable analytische Funktion zu definieren. Die Frage ist dann, wie zu beliebigen Ordnungen übergegangen werden kann. Bevor wir uns jedoch diesem Problem zuwenden, definieren wir für physikalische Werte der Rapiditäten und  $\alpha_1 > \dots > \alpha_n$

$$f_{\epsilon_1 \dots \epsilon_n}^{\mathcal{O}}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = F_{\epsilon_1 \dots \epsilon_n}^{\mathcal{O}}(|\alpha_i - \alpha_j|, 1 \leq i < j \leq n) = \langle 0 | \mathcal{O}(0) | (\alpha_1, \epsilon_1), \dots, (\alpha_n, \epsilon_n) \rangle^{in} \quad (2.8)$$

Wir wollen nun untersuchen, wie die rechte Seite dieser Gleichung sich verhält, wenn irgendein  $\alpha_j$  immer größer wird. Irgendwann kommt es in die kritische Region  $\alpha_j \approx \alpha_i$  ( $i = j - 1$ ). Vergrößert man es weiter, wird der Formfaktor analytisch fortgesetzt, indem das Argument  $|\alpha_i - \alpha_j| = \alpha_i - \alpha_j$  durch  $-|\alpha_i - \alpha_j| = \alpha_i - \alpha_j$  ersetzt wird. Dieser Übergang entspricht der Ersetzung  $s_{ij} + i0 \rightarrow s_{ij} - i0$  (vgl. Abbildung 1.1). Die Watsongleichung aus dem letzten Abschnitt besagt dann aber gerade, daß für  $\alpha_1 > \dots > \alpha_j > \alpha_i > \dots > \alpha_n$

$$f_{\epsilon_1 \dots \epsilon_n}^{\mathcal{O}}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = f_{\epsilon_1 \dots \epsilon'_j \epsilon'_i \dots \epsilon_n}^{\mathcal{O}}(\alpha_1, \dots, \alpha_j, \alpha_i, \dots, \alpha_n) \dot{S}_{\epsilon_i \epsilon_j}^{\epsilon'_j \epsilon'_i}(\alpha_i - \alpha_j).$$

Multipliziert man diese Gleichung mit dem inversen der  $S$ -Matrix auf der rechten Seite, so ist wegen  $\dot{S}_{ij}^{-1}(\theta) = \dot{S}_{ji}(-\theta)$  unmittelbar einsichtig, daß dieselbe Gleichung für beliebige Ordnungen der Rapiditäten gilt, weil ein formal gleichartiger Ausdruck entsteht, bei dem die Rapiditäten auf der rechten Seite der Gleichung jedoch nicht mehr geordnet sind. Das Ergebnis halten wir fest in folgendem

#### Satz 2 (Watson-Gleichung).

Die rapiditätsabhängigen Formfaktoren genügen der Watson-Gleichung

$$f_{\epsilon_1 \dots \epsilon_n}^{\mathcal{O}}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = f_{\epsilon_1 \dots \epsilon'_j \epsilon'_i \dots \epsilon_n}^{\mathcal{O}}(\alpha_1, \dots, \alpha_j, \alpha_i, \dots, \alpha_n) \dot{S}_{\epsilon_i \epsilon_j}^{\epsilon'_j \epsilon'_i}(\alpha_i - \alpha_j). \quad (2.9)$$

Durch die Watson-Gleichung (2.9) ist die analytische Fortsetzung des physikalischen Formfaktors  $f_{\epsilon_1 \dots \epsilon_n}^{\mathcal{O}}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  ( $\alpha_1 > \dots > \alpha_n$ ) auf beliebige Ordnungen der Rapiditäten gegeben. Nach einem bekannten Satz der Funktionentheorie ist sie eindeutig, da der ursprüngliche Definitionsbereich für eine einzelne Variable bei festen Werten der anderen jeweils ein ganzes offenes Intervall ist.

Wegen (2.9) lassen sich die rapiditätsabhängigen Formfaktoren auch mit Matrixelementen von out-Zuständen in Verbindung bringen. So gilt für  $\alpha_1 < \dots < \alpha_n$  nach (1.7) und Definition (2.8)

$$\begin{aligned} f_{\epsilon_1 \dots \epsilon_n}^{\mathcal{O}}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) &= f_{\epsilon'_n \dots \epsilon'_1}^{\mathcal{O}}(\alpha_n, \dots, \alpha_1) \dot{S}_{\epsilon_1 \dots \epsilon_n}^{\epsilon'_n \dots \epsilon'_1}(\{\alpha_i\}) \\ &= \langle 0 | \mathcal{O}(0) | (p_n, \epsilon'_n), \dots, (p_1, \epsilon'_1) \rangle^{in} \dot{S}_{\epsilon_1 \dots \epsilon_n}^{\epsilon'_n \dots \epsilon'_1}(\{p_i\}) \\ &= \langle 0 | \mathcal{O}(0) | (p_1, \epsilon_1), \dots, (p_n, \epsilon_n) \rangle^{out}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

An dieser Stelle sollen zusätzliche rapiditätsabhängige Formfaktoren eingeführt werden, die die ursprüngliche Definition verallgemeinern. Dazu setzen wir für  $\alpha_1 > \dots > \alpha_n$  und  $\beta_1 < \dots < \beta_m$

$$\begin{aligned} f_{\mu_1 \dots \mu_n}^{\mathcal{O} \nu_1 \dots \nu_m}(\beta_1, \dots, \beta_m | \alpha_1, \dots, \alpha_n) \\ = {}^{out} \langle (\beta_m, \nu_m), \dots, (\beta_1, \nu_1) | \mathcal{O}(0) | (\alpha_1, \mu_1), \dots, (\alpha_n, \mu_n) \rangle^{in}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Es sei an dieser Stelle daran erinnert, daß diese Funktionen, bei denen Teilchen sowohl im Bra- wie auch im Ket-Zustand stehen, nicht analytisch in ihren Argumenten sind und sogar distributive Anteile besitzen. Das nächste Ziel wird daher sein, sie mit Hilfe der Crossing-Relationen explizit in Produkte von distributiven Anteilen und Randwerten von analytischen Funktionen zu zerlegen.

Für rapiditätsabhängige Formfaktoren wollen wir künftig die Schreibweise

$$[f^{\mathcal{O}}(\beta_1, \dots, \beta_m | \alpha_1, \dots, \alpha_n)]_{\mu_1 \dots \mu_n}^{\nu_1 \dots \nu_m} = \begin{array}{c} \nu_1 \quad \nu_m \\ \beta_1 \quad \dots \quad \beta_m \\ \hline f \\ \hline \alpha_1 \quad \dots \quad \alpha_n \\ \mu_1 \quad \mu_n \end{array}$$

verwenden. Damit hat die Watson-Gleichung die Darstellung

$$\begin{array}{c} \nu_1 \quad \nu_k \quad \nu_l \quad \nu_m \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \hline f \\ \hline \mu_1 \quad \mu_i \quad \mu_j \quad \mu_n \end{array} = \begin{array}{c} \nu_1 \quad \nu_k \quad \nu_l \quad \nu_m \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \hline f \\ \hline \mu_1 \quad \mu_i \quad \mu_j \quad \mu_n \end{array} = \begin{array}{c} \nu_1 \quad \nu_k \quad \nu_l \quad \nu_m \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \hline f \\ \hline \mu_1 \quad \mu_i \quad \mu_j \quad \mu_n \end{array} \quad (2.12)$$

Die hintere Gleichung ist dabei die Vorwegnahme einer Folgerung der Crossing-Relationen aus dem nächsten Abschnitt.

## 2.2.2 Crossing-Relationen

Zuerst wollen wir uns mit dem Fall beschäftigen, daß die Rapiditäten der Teilchen, die in den Bra- bzw. Ket-Vektoren stehen, alle unterschiedlich sind, d.h.  $\{\alpha_i\} \cap \{\beta_i\} = \emptyset$ . Für diesen Fall hatten wir in Satz 1 gesehen, daß

$$F_{\mu_1 \dots \mu_n}^{\mathcal{O} \nu_1 \dots \nu_m}(s_{\alpha\alpha} + i0, t_{\alpha\beta} - i0, s_{\beta\beta} + i0) = F_{\bar{\nu}_m \dots \bar{\nu}_1 \mu_1 \dots \mu_n}^{\mathcal{O}}(s_{\alpha\alpha} + i0, t_{\alpha\beta} - i0, s_{\beta\beta} + i0).$$

Besitzen die Rapiditäten die Ordnung  $\alpha_1 > \dots > \alpha_n$  und  $\beta_1 < \dots < \beta_m$ , so läßt sich die linke Seite dieser Gleichung nach (2.8) durch  $f_{\mu_1 \dots \mu_n}^{\mathcal{O}\nu_1 \dots \nu_m}(\beta_1, \dots, \beta_m | \alpha_1, \dots, \alpha_n)$  ersetzen. Die rechte Seite ist hingegen nur mit einem rapiditätsgeordneten Formfaktor in Verbindung zu bringen, wenn zusätzlich die  $\alpha$ 's eine bestimmte Ordnung relativ zu den  $\beta$ 's haben. Für die erste Möglichkeit  $\alpha_i < \beta_j$  haben wir nach (2.8)

$$\begin{aligned} F_{\bar{\nu}_m \dots \bar{\nu}_1 \mu_1 \dots \mu_n}^{\mathcal{O}}(s_{\alpha\alpha} + i0, t_{\alpha\beta} - i0, s_{\beta\beta} + i0) \\ = f_{\bar{\nu}_m \dots \bar{\nu}_1 \mu_1 \dots \mu_n}^{\mathcal{O}}(\beta_m + i\pi - i0, \dots, \beta_1 + i\pi - i0, \alpha_1, \dots, \alpha_n), \end{aligned}$$

während im Fall  $\alpha_i > \beta_j$  auf

$$\begin{aligned} F_{\bar{\nu}_m \dots \bar{\nu}_1 \mu_1 \dots \mu_n}^{\mathcal{O}}(s_{\alpha\alpha} + i0, t_{\alpha\beta} - i0, s_{\beta\beta} + i0) \\ = f_{\mu_1 \dots \mu_n \bar{\nu}_m \dots \bar{\nu}_1}^{\mathcal{O}}(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_m - i\pi + i0, \dots, \beta_1 - i\pi + i0) \end{aligned}$$

zurückgegriffen werden muß. Dies sind beides Konsequenzen der Tatsache, daß die Funktionen  $F$  keinen Verzweigungsschnitt bei  $t \pm i0$  haben (vgl. 2.7). Crossing bedeutet bekanntlich ausgehend vom normalen (nicht analytisch fortgesetzten) Matrixelement  $s_{\alpha\beta} + i0 \rightarrow t_{\alpha\beta} - i0$  bzw.  $|\alpha_i - \beta_j| \rightarrow i\pi - |\alpha_i - \beta_j|$ . In Abbildung 1.1 entspricht das dem Übergang von Bereich I zu II. Durch das Fehlen des Verzweigungsschnittes bei  $t \pm i0$  ist das gleichbedeutend mit dem Übergang  $s_{\alpha\beta} + i0 \rightarrow t_{\alpha\beta} + i0$  bzw.  $|\alpha_i - \beta_j| \rightarrow i\pi + |\alpha_i - \beta_j|$ , also gemäß Abbildung 1.1 dem Übergang von I zu III. Da nur die  $\beta$ -Teilchen gecrosst wurden (alle  $\alpha_i$  bleiben fest!), ist das für  $\alpha_i < \beta_j$  äquivalent mit  $\beta_j - \alpha_i \rightarrow i\pi + \beta_j - \alpha_i$ , also  $\beta_j \rightarrow \beta_j + i\pi$ . Umgekehrt muß für  $\alpha_i > \beta_j$  die Ersetzung  $\alpha_i - \beta_j \rightarrow i\pi + \alpha_i - \beta_j$ , also  $\beta_j \rightarrow \beta_j - i\pi$ , vorgenommen werden. Damit gilt

$$\begin{aligned} f_{\mu_1 \dots \mu_n}^{\mathcal{O}\nu_1 \dots \nu_m}(\beta_1, \dots, \beta_m | \alpha_1, \dots, \alpha_n) \\ = \begin{cases} f_{\bar{\nu}_m \dots \bar{\nu}_1 \mu_1 \dots \mu_n}^{\mathcal{O}}(\beta_m + i\pi, \dots, \beta_1 + i\pi, \alpha_1, \dots, \alpha_n) & , \beta_m > \dots > \beta_1 > \alpha_1 > \dots > \alpha_n \\ f_{\mu_1 \dots \mu_n \bar{\nu}_m \dots \bar{\nu}_1}^{\mathcal{O}}(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_m - i\pi, \dots, \beta_1 - i\pi) & , \alpha_1 > \dots > \alpha_n > \beta_m > \dots > \beta_1. \end{cases} \end{aligned}$$

In der Nähe von Polen ist auf eine geeignete Beschreibung mit  $\pm i0$  zu achten. Nach Abbildung 1.1 sind dann die Ersetzungen  $\beta_m + i\pi \rightarrow \beta_m + i\pi - i0$  bzw.  $\beta_m - i\pi \rightarrow \beta_m - i\pi + i0$  durchzuführen. Innerhalb der Gruppen  $\{\alpha_i\}$  bzw.  $\{\beta_j\}$  lassen sich dann die rapiditätsabhängigen Formfaktoren nach (2.9) in Verbindung mit der Crossing-Symmetrie (1.16) der  $S$ -Matrix durch Multiplikation mit  $S$ -Matrizen auf beliebige Ordnungen derselben analytisch fortsetzen<sup>4</sup>, so daß diese Gleichungen beide allgemein gelten, sofern  $\{\alpha_i\} \cap \{\beta_i\} = \emptyset$ . Graphisch läßt sich dies ausdrücken über

Nebenbei haben wir damit auch die schon im letzten Abschnitt angegebene Watson-Gleichung (2.12) für  $S$ -Matrizen, die sich auf Bra-Vektorindizes beziehen, bewiesen. Die

<sup>4</sup>Dies ist erstmal nur für die rechte Seite möglich

Multiplikation mit einer  $S$ -Matrix, die auf zwei Teilchen im Bra-Zustand wirkt, kann über die Crossing-Relation (1.16) aufgefaßt werden als Wirkung auf die entsprechenden Ket-Zustände, was nach der Watson-Gleichung (2.9) zu einer Vertauschung der beiden Teilchen führt. Für diese kann dann die Crossing-Relation rückwärts angewendet werden. Anhand der obigen Abbildung ist das leicht einzusehen.

Als weiteres Resultat haben wir die sogenannte zyklische Gleichung

$$\begin{aligned} f_{\bar{\nu}_m \dots \bar{\nu}_1 \mu_1 \dots \mu_n}^{\mathcal{O}}(\beta_m + i\pi - i0, \dots, \beta_1 + i\pi - i0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \\ = f_{\mu_1 \dots \mu_n \bar{\nu}_m \dots \bar{\nu}_1}^{\mathcal{O}}(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_m - i\pi + i0, \dots, \beta_1 - i\pi + i0) \end{aligned}$$

erhalten. Sie gilt auch für  $\{\alpha_i\} \cap \{\beta_i\} \neq \emptyset$ , da die oben angegebenen Identitäten dann wie gehabt für den zusammenhängenden Teil von  $f_{\mu_1 \dots \mu_n}^{\mathcal{O}^{\nu_1 \dots \nu_m}}(\beta_1, \dots, \beta_m | \alpha_1, \dots, \alpha_n)$  gelten. Es ist mittlerweile gelungen, diese zyklische Gleichung streng im Rahmen der algebraischen Quantenfeldtheorie zu diskutieren [52, 53].

Nun wollen wir die oben hergeleitete Beziehung auf beliebige Rapiditäten verallgemeinern. Wir gehen aus von den LSZ-Reduktionsformeln (A.2)

$$\begin{aligned} & \text{out} \langle (\beta_m, \nu_m), \dots, (\beta_1, \nu_1) | \mathcal{O}(x) | (\alpha_1, \mu_1), \dots, (\alpha_n, \mu_n) \rangle^{in} \\ & = \text{out} \langle (\beta_m, \nu_m), \dots, (\beta_2, \nu_2) | \mathcal{O}(x) a_{\nu_1}^{in}(\beta_1) | (\alpha_1, \mu_1), \dots, (\alpha_n, \mu_n) \rangle^{in} \\ & - i \int d^4 y e^{+ip(\beta_1)y} \text{out} \langle (\beta_m, \nu_m), \dots, (\beta_2, \nu_2) | \mathcal{T} [\mathcal{O}(x) \mathcal{K} \phi_{\nu_1}(y)] | (\alpha_1, \mu_1), \dots, (\alpha_n, \mu_n) \rangle^{in} \end{aligned}$$

und (A.3) aus Anhang A

$$\begin{aligned} & \text{out} \langle (\beta_m, \nu_m), \dots, (\beta_2, \nu_2) | \mathcal{O}(x) | (\beta_1, \bar{\nu}_1), (\alpha_1, \mu_1), \dots, (\alpha_n, \mu_n) \rangle^{in} \\ & = \text{out} \langle (\beta_m, \nu_m), \dots, (\beta_2, \nu_2) | a_{\bar{\nu}_1}^{\text{out}}(\beta_1)^\dagger \mathcal{O}(x) | (\alpha_1, \mu_1), \dots, (\alpha_n, \mu_n) \rangle^{in} \\ & - i \int d^4 y e^{-ip(\beta_1)y} \text{out} \langle (\beta_m, \nu_m), \dots, (\beta_2, \nu_2) | \mathcal{T} [\mathcal{O}(x) \mathcal{K} \phi_{\nu_1}(y)] | (\alpha_1, \mu_1), \dots, (\alpha_n, \mu_n) \rangle^{in}. \end{aligned}$$

Setzt man den unteren Ausdruck unter Ausnutzung der maximalen Analytizität gemäß  $p(\beta_1) \rightarrow -p(\beta_1)$  analytisch fort, fällt der nichtzusammenhängende Teil weg. Da die Integralausdrücke dann in beiden Formeln identisch sind, kann derselbe in der ersten Gleichung schließlich durch das analytisch fortgesetzte Matrixelement der zweiten Gleichung ersetzt werden. Verwendet man die Definition der Formfaktoren und die Crossing-Formel (2.5), so erhält man

$$\begin{aligned} & \text{out} \langle (\beta_m, \nu_m), \dots, (\beta_1, \nu_1) | \mathcal{O}(x) | (\alpha_1, \mu_1), \dots, (\alpha_n, \mu_n) \rangle^{in} \\ & = F_{\mu_1 \dots \mu_n}^{\mathcal{O}^{\nu_1 \dots \nu_m}}(s_{pp} + i0, t_{pq} - i0, s_{qq} + i0) \\ & = \sum_{j=1}^n 4\pi \delta_{\mu_j}^{\nu_1} \delta(\beta_1 - \alpha_j) F_{\mu_1 \dots \mu_j \dots \mu_n}^{\mathcal{O}^{\nu_2 \dots \nu_m}}(s_{\alpha\alpha} + i0, t_{\alpha\beta} - i0, s_{\beta\beta} + i0) \\ & \quad + F_{\bar{\nu}_1 \mu_1 \dots \mu_n}^{\mathcal{O}^{\nu_2 \dots \nu_m}}(s_{\alpha\alpha} + i0, t_{\alpha\beta} - i0, s_{\beta\beta} + i0). \end{aligned}$$

Der Übergang zu rapiditätsabhängigen Formfaktoren ist wiederum auf zwei Arten möglich. Unter der Annahme  $\beta_m > \dots > \beta_1 \geq \alpha_1 > \dots > \alpha_n$  gilt nach (2.11)

$$\begin{aligned} f_{\mu_1 \dots \mu_n}^{\mathcal{O}^{\nu_1 \dots \nu_m}}(\beta_1, \dots, \beta_m | \alpha_1, \dots, \alpha_n) & = 4\pi \delta_{\mu_1}^{\nu_1} \delta(\beta_1 - \alpha_1) f_{\mu_2 \dots \mu_n}^{\mathcal{O}^{\nu_2 \dots \nu_m}}(\beta_2, \dots, \beta_m | \alpha_2, \dots, \alpha_n) \\ & \quad + f_{\bar{\nu}_1 \mu_1 \dots \mu_n}^{\mathcal{O}^{\nu_2 \dots \nu_m}}(\beta_2, \dots, \beta_m | \beta_1 + i\pi - i0, \alpha_1, \dots, \alpha_n). \end{aligned}$$

Hingegen erhalten wir für  $\alpha_1 > \dots > \alpha_n \geq \beta_m > \dots > \beta_1$

$$f^{\mathcal{O}_{\mu_1 \dots \mu_n}^{\nu_1 \dots \nu_m}}(\beta_1, \dots, \beta_m | \alpha_1, \dots, \alpha_n) = 4\pi \delta_{\mu_n}^{\nu_m} \delta(\beta_m - \alpha_n) f^{\mathcal{O}_{\mu_1 \dots \mu_{n-1}}^{\nu_{m-1} \dots \nu_1}}(\beta_{m-1}, \dots, \beta_1 | \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \\ + f^{\mathcal{O}_{\mu_1 \dots \mu_n \bar{\nu}_m}^{\nu_{m-1} \dots \nu_2}}(\beta_{m-1}, \dots, \beta_1 | \alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_m - i\pi + i0).$$

Für das Zustandekommen der Argumente sei auf die Herleitung der Crossing-Relationen für den zusammenhängenden Teil verwiesen, die am Anfang dieses Abschnitts erfolgte. Im Gegensatz zu dort muß man hier jedoch vorsichtiger vorgehen, um diese Gleichungen auf beliebige Ordnungen von Rapiditäten fortzusetzen. Nach Multiplikation mit den dazu nötigen  $S$ -Matrizen ergeben sich die Crossing-Formeln

$$f^{\mathcal{O}_{\mu_1 \dots \mu_n}^{\nu_1 \dots \nu_m}}(\beta_1, \dots, \beta_m | \alpha_1, \dots, \alpha_n) \\ = \sum_{i=1}^n 4\pi \delta_{\mu_i}^{\nu_1} \delta(\beta_1 - \alpha_i) f^{\mathcal{O}_{\mu'_1 \dots \mu'_{i-1} \mu_{i+1} \dots \mu_n}^{\nu_2 \dots \nu_m}}(\beta_2, \dots, \beta_m | \alpha_1, \dots, \hat{\alpha}_i, \dots, \alpha_n) \times \\ \times \dot{S}_{\mu_1 \sigma_1}^{\mu'_1 \mu'_1}(\alpha_1 - \alpha_i) \dot{S}_{\mu_2 \sigma_2}^{\sigma_1 \mu'_2}(\alpha_2 - \alpha_i) \dots \dot{S}_{\mu_{i-1} \mu_i}^{\sigma_{i-1} \mu'_i}(\alpha_{i-1} - \alpha_i) + \\ + f^{\mathcal{O}_{\bar{\nu}_1 \mu_1 \dots \mu_n}^{\nu_2 \dots \nu_m}}(\beta_2, \dots, \beta_m | \beta_1 + i\pi - i0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \\ = \sum_{i=1}^n f^{\mathcal{O}_{\mu_1 \dots \mu_{i-1} \mu'_{i+1} \dots \mu_n}^{\nu_{m-1} \dots \nu_1}}(\beta_{m-1}, \dots, \beta_1 | \alpha_1, \dots, \hat{\alpha}_i, \dots, \alpha_n) 4\pi \delta_{\mu'_i}^{\nu_m} \delta(\beta_m - \alpha_i) \times \\ \times \dot{S}_{\sigma_n \mu_n}^{\mu'_n \mu'_i}(\alpha_i - \alpha_n) \dots \dot{S}_{\mu_i \mu_{i+1}}^{\mu'_{i+1} \sigma_{i+1}}(\alpha_i - \alpha_{i+1}) + \\ + f^{\mathcal{O}_{\mu_1 \dots \mu_n \bar{\nu}_m}^{\nu_{m-1} \dots \nu_1}}(\beta_{m-1}, \dots, \beta_1 | \alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_m - i\pi + i0). \quad (2.13)$$

Dabei wurde angenommen, daß sich nur ein bestimmtes  $\alpha_i$  in der Nähe von  $\beta_1$  bzw.  $\beta_m$  befindet. Dann bleibt jeweils nur einer der Summanden mit den  $\delta$ -Funktionen übrig. Durch Iteration der oben angeführten Formeln lassen sich allgemeine Crossing-Formeln gewinnen, die den ursprünglichen Formfaktor mit einseitig vollständig ausreduzierten Formfaktoren verknüpfen. Wir werden später in den Sätzen 9 und 10 in Kapitel 4 auf diese Frage zurückkommen, wo dann auch eine für diesen Sachverhalt geeignetere Nomenklatur zur Verfügung steht. Die Relationen (2.13) besitzen die graphische Darstellung

bzw.

### 2.2.3 Kinematische Pole und Residuen

Aus den Crossing-Formeln (2.13) im letzten Abschnitt lassen sich die Residuen von kinematischen Polen der Formfaktoren berechnen. In formalisierter Schreibweise lauten sie in

einem Spezialfall

$$\begin{aligned}
& f_{2\dots n}^1(\alpha_1|\alpha_2, \dots, \alpha_n) \\
&= \sum_{j=2}^n 4\pi\delta(\alpha_1 - \alpha_j) \mathbf{1}_j^1 f_{2\dots\hat{j}\dots n}^{\mathcal{O}}(\alpha_2, \dots, \hat{\alpha}_j, \dots, \alpha_n) \dot{S}_{2j}(\alpha_2 - \alpha_j) \cdots \dot{S}_{j-1j}(\alpha_{j-1} - \alpha_j) \\
&\quad + \mathbf{C}^{1\bar{1}} f_{\bar{1}2\dots n}^{\mathcal{O}}(\alpha_1 + i\pi - i0, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \\
&= \sum_{j=2}^n 4\pi\delta(\alpha_1 - \alpha_j) \mathbf{1}_j^1 f_{2\dots\hat{j}\dots n}^{\mathcal{O}}(\alpha_2, \dots, \hat{\alpha}_j, \dots, \alpha_n) \dot{S}_{jn}(\alpha_j - \alpha_n) \cdots \dot{S}_{jj+1}(\alpha_j - \alpha_{j+1}) \\
&\quad + f_{2\dots n\bar{1}}^{\mathcal{O}}(\alpha_2, \dots, \alpha_n, \alpha_1 - i\pi + i0) \mathbf{C}^{\bar{1}1}. \quad (2.14)
\end{aligned}$$

Für  $\alpha_1 \approx \alpha_2$  und  $\alpha_j \neq \alpha_1$  ( $j = 3, \dots$ ) ergeben sich die zwei Gleichungen

$$\begin{aligned}
f_{1\dots n}^{\mathcal{O}}(\alpha_1 + i\pi - i0, \alpha_2, \dots, \alpha_n) &\approx \frac{1}{\alpha_1 - i0 - \alpha_2} \mathbf{C}_{12} g(\alpha_2, \dots, \alpha_n) \\
f_{2\dots n\bar{1}}^{\mathcal{O}}(\alpha_2, \dots, \alpha_n, \alpha_1 - i\pi + i0) &\approx \frac{1}{\alpha_1 + i0 - \alpha_2} \mathbf{C}_{12} g(\alpha_2, \dots, \alpha_n).
\end{aligned}$$

Mit der Beziehung  $\frac{1}{x \pm i0} = \frac{\mathcal{P}}{x} \mp i\pi\delta(x)$  [40] und durch Vergleich mit (2.14) folgt demnach

$$\begin{aligned}
& 4\pi\delta(\alpha_1 - \alpha_2) \mathbf{C}_{12} f_{3\dots n}^{\mathcal{O}}(\alpha_3, \dots, \alpha_n) + \left( \frac{\mathcal{P}}{x} + i\pi\delta(\alpha_1 - \alpha_2) \right) \mathbf{C}_{12} g(\alpha_2, \dots, \alpha_n) \\
&= 4\pi\delta(\alpha_1 - \alpha_2) \mathbf{C}_{12} f_{3\dots n}^{\mathcal{O}}(\alpha_3, \dots, \alpha_n) \dot{S}_{2n}(\alpha_2 - \alpha_n) \cdots \dot{S}_{23}(\alpha_2 - \alpha_3) \\
&\quad + \left( \frac{\mathcal{P}}{x} - i\pi\delta(\alpha_1 - \alpha_2) \right) \mathbf{C}_{12} g(\alpha_2, \dots, \alpha_n).
\end{aligned}$$

Identifizierung der  $\delta$ -Anteile ergibt

$$g(\alpha_2, \dots, \alpha_n) = 2i f_{3\dots n}^{\mathcal{O}}(\alpha_3, \dots, \alpha_n) (\mathbf{1} - \dot{S}_{2n}(\alpha_2 - \alpha_n) \cdots \dot{S}_{23}(\alpha_2 - \alpha_3)).$$

Das Residuum eines Formfaktors an einem kinematischen Pol verknüpft diesen also mit einem Formfaktor, der zwei Teilchen weniger beschreibt. Zusammengefaßt lautet das Ergebnis

$$\text{Res}_{\alpha_{12}=i\pi} f_{1\dots n}^{\mathcal{O}}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 2i \mathbf{C}_{12} f_{3\dots n}^{\mathcal{O}}(\alpha_3, \dots, \alpha_n) (\mathbf{1} - \dot{S}_{2n}(\alpha_{2n}) \cdots \dot{S}_{23}(\alpha_{23})). \quad (2.15)$$

## 2.2.4 Gebundene Zustände

In Abschnitt 1.3.7 haben wir gesehen, daß die  $S$ -Matrix Pole besitzt, die gebundenen Zuständen entsprechen. Außerdem wurden Regeln entwickelt, wie sich diese in das Bild der Streuung der „elementaren“ Teilchen einpassen<sup>5</sup>. Analoge Folgerungen sollen jetzt für die Formfaktoren abgeleitet werden. Der Hintergrund liegt in folgender Feststellung: Die Watsongleichung (2.9)

$$f_{\epsilon_1 \dots \epsilon_n}^{\mathcal{O}}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = f_{\epsilon_1 \dots \epsilon'_j \epsilon'_i \dots \epsilon_n}^{\mathcal{O}}(\alpha_1, \dots, \alpha_j, \alpha_i, \dots, \alpha_n) \dot{S}_{\epsilon'_i \epsilon'_j}^{\epsilon_i \epsilon_j}(\alpha_i - \alpha_j)$$

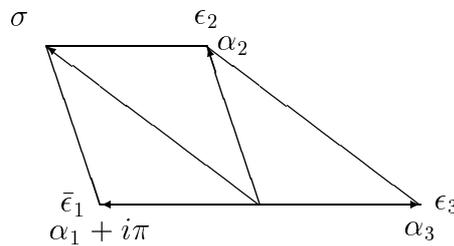
<sup>5</sup>An dieser Stelle soll noch einmal betont werden, daß in der Quantenfeldtheorie alle Teilchen gleichberechtigt sind, also auch alle gleichermaßen elementar.

für die rapiditätsabhängigen Formfaktoren läßt vermuten, daß diese neben den kinematischen auch weitere Pole haben müssen, die genau den Polen der  $S$ -Matrix – also gebundenen Zuständen – entsprechen. In [14] wird über die Källen-Lehmann-Darstellung und analytische Fortsetzung von attraktiven Werten der Kopplungskonstanten, bei denen der gebundene Zustand vorhanden ist, zu repulsiven Werten, bei denen der gebundene Zustand instabil<sup>6</sup> ist, eine Gleichung für das Residuum hergeleitet, das zu einem solchen Pol des Formfaktors gehört. Hier soll ein anderer Weg beschrrieben werden, der gewisse technische Annahmen vermeidet, sich allerdings mehr auf Konsistenz-Niveau bewegt.

Betrachte dazu den Formfaktor

$$f_{\bar{\epsilon}_1 \epsilon_2 \epsilon_3 \epsilon_4 \dots \epsilon_n}(\alpha_1 + i\pi, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \dots \alpha_n).$$

Es sollen Fusionsprozesse untersucht werden, die mit dem Diagramm



assoziiert sind. Das Residuum des Formfaktors zu einem Pol, der zu gebundenen Zuständen gehört, sollte mit einem Formfaktor zusammenhängen, der ein Teilchen weniger enthält als der ursprüngliche, also statt der beiden alten eben gerade den gebundenen Zustand. Eine Lesart des Diagramms beschreibt die aufeinanderfolgenden Fusionen  $\sigma = (\bar{\epsilon}_1 \epsilon_2)$  und  $\epsilon_2 = (\sigma \epsilon_3)$ . Dem würde entsprechen, genau die beiden dazu relevanten Residuen des Formfaktors hintereinander auszurechnen und dabei auf einen Formfaktor mit zwei Teilchen weniger zu stoßen. Allerdings kann man den Zwischenschritt auch versuchsweise auslassen und stattdessen die Formel für kinematische Pole (2.15) verwenden. Führt man dies nach Anwendung der Watson-Gleichung (2.9) auf die Teilchen 2 und 3 durch, so ergibt sich

$$\begin{aligned} & i \operatorname{Res}_{\alpha_{13}=0} f_{\bar{\epsilon}_1 \epsilon_2 \epsilon_3 \epsilon_4 \dots \epsilon_n}(\alpha_1 + i\pi, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \dots, \alpha_n) \\ &= -2 f_{\epsilon_2' \epsilon_4 \dots \epsilon_n}(\alpha_2, \alpha_4, \dots, \alpha_n) \dot{S}_{\epsilon_2 \epsilon_3}^{\epsilon_1 \epsilon_2'}(\alpha_{23}) + 2 f_{\epsilon_2 \epsilon_4' \dots \epsilon_n'}(\alpha_2, \alpha_4, \dots, \alpha_n) \left[ \dot{S}(\alpha_{3n}) \dots S(\alpha_{34}) \right]_{\epsilon_3 \dots \epsilon_n}^{\epsilon_4' \dots \epsilon_n' \epsilon_1}. \end{aligned}$$

Durch die Berechnung eines zweiten Residuums, muß eine weitere bisher noch unabhängige Variable fixiert werden. Wie man an der obigen Abbildung erkennen kann, hat die  $S$ -Matrix im ersten Summanden allerdings nur einen gebundenen Zustand im  $t$ -Kanal, d.h. nicht für  $\alpha_2 - \alpha_3 = \alpha_{23} = \theta_{\epsilon_2 \epsilon_3}^\sigma$ , sondern für  $(\alpha_3 + i\pi) - \alpha_2 = i\pi - \alpha_{23} = \theta_{\epsilon_2 \epsilon_3}^\sigma$ . Bildet man dieses Residuum gemäß (1.13), fällt der zweite Summand weg und man erhält

$$\begin{aligned} & i \operatorname{Res}_{\alpha_{23}=\theta_{\nu\mu}^\sigma} i \operatorname{Res}_{\alpha_{13}=0} f_{\bar{\epsilon}_1 \epsilon_2 \epsilon_3 \epsilon_4 \dots \epsilon_n}(\alpha_1 + i\pi, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \dots, \alpha_n) \\ &= -2 f_{\epsilon_2' \epsilon_4 \dots \epsilon_n}(\alpha_2, \alpha_4, \dots, \alpha_n) \eta_{\sigma}^{\epsilon_2' \bar{\epsilon}_3} \eta_{\bar{\epsilon}_1 \epsilon_2}^\sigma. \end{aligned}$$

<sup>6</sup>Da das Teilchen instabil ist, kann es nicht in in- oder out-Zuständen auftreten, so daß es im Bootstrap-Bild praktisch gar nicht existent ist.

Es ist sinnvoll, sich die einzelnen Schritte graphisch noch einmal zu veranschaulichen. Der erste Schritt hat die Darstellung

$$i \operatorname{Res}_{\alpha_{23}=i\pi-\theta_{\epsilon_2\epsilon_3}^\sigma} \quad i \operatorname{Res}_{\alpha_{13}=i\pi} \quad \left( \begin{array}{c} \epsilon_1 \\ | \\ \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ | \\ \epsilon_2 \quad \epsilon_3 \quad \epsilon_4 \quad \dots \quad \epsilon_n \end{array} \right) f^\mathcal{O} = -2i \operatorname{Res}_{\alpha_{23}=i\pi-\theta_{\epsilon_2\epsilon_3}^\sigma} \left( \begin{array}{c} \epsilon_1 \\ | \\ \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ | \\ \epsilon_2 \quad \epsilon_3 \quad \epsilon_4 \quad \dots \quad \epsilon_n \end{array} \right) f^\mathcal{O} + \text{anderer} \Big),$$

wobei „anderer“ einen Ausdruck bezeichnet, bei dem das Teilchen nach rechts durch alle anderen Teilchen streut. Nach Anwendung der Crossing-Relation (1.16) kann auch das zweite Residuum ausgeführt werden, wobei man zu

$$i \operatorname{Res}_{\alpha_{23}=i\pi-\theta_{\epsilon_2\epsilon_3}^\sigma} \quad i \operatorname{Res}_{\alpha_{13}=0} \quad \left( \begin{array}{c} \epsilon_1 \\ | \\ \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ | \\ \epsilon_2 \quad \epsilon_3 \quad \epsilon_4 \quad \dots \quad \epsilon_n \end{array} \right) f^\mathcal{O} = -2 \left( \begin{array}{c} \epsilon_1 \\ | \\ \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ | \\ \epsilon_2 \quad \epsilon_3 \quad \epsilon_4 \quad \dots \quad \epsilon_n \end{array} \right) f^\mathcal{O}$$

gelangt. Biegt man die rechte der Linien nach unten, sieht es offenbar so aus, als ob man anstelle des oben geschilderten Vorganges zweimal hintereinander eine Bound-State-Fusion durchführen könnte, bei der jeweils ein erweiterter Intertwiner und ein  $i\sqrt{2}$  als Faktor entsteht. Es soll also angenommen werden, daß die Gleichung

$$i \operatorname{Res}_{\alpha_{12}=\theta_{\mu_1\mu_2}^\sigma} f_{\mu_1\mu_2\mu_3\cdots\mu_n}^\mathcal{O}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n) = i\sqrt{2} f_{\sigma\mu_3\cdots\mu_n}^\mathcal{O}(\beta, \alpha_3, \dots, \alpha_n) \eta_{\mu_1\mu_2}^\sigma$$

erfüllt ist, wobei die Impulse durch  $p(\beta) = p(\alpha_1) + p(\alpha_2)$  gegeben sind. In [14] ist die gleiche Formel mit physikalischeren Hilfsmitteln und strenger, dafür jedoch auch in einer spezielleren Situation, hergeleitet worden.

## 2.2.5 Formfaktoren und Korrelationsfunktionen

Sind die Formfaktoren eines Operators erst einmal bestimmt, so lassen sich daraus prinzipiell alle Korrelationsfunktionen ausrechnen. Prinzipiell deshalb, weil es sich um eine formale Reihe mit Integralen handelt, die vielleicht gar nicht explizit ausgewertet werden kann. Bis jetzt ist eine explizite Auswertung meiner Kenntnis nach nur für das Ising-Modell gelungen [54]. Die Idee ist hingegen simpel und soll am Beispiel einer Zweipunktfunktion kurz vorgestellt werden. Einfügen eines vollständigen Systems von Zwischenzuständen ergibt

$$\begin{aligned} \langle 0 | \mathcal{O}_1(x) \mathcal{O}_2(y) | 0 \rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\epsilon_1 \cdots \epsilon_n} \int \frac{d\vec{p}_1}{4\pi\omega_{\vec{p}_1}} \cdots \frac{d\vec{p}_n}{4\pi\omega_{\vec{p}_n}} \frac{1}{n!} \\ &\quad \langle 0 | \mathcal{O}_1(x) | (p_1, \epsilon_1), \dots, (p_n, \epsilon_n) \rangle^{in} \cdot {}^{in} \langle (p_n, \epsilon_n), \dots, (p_1, \epsilon_1) | \mathcal{O}_2(y) | 0 \rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\epsilon_1 \cdots \epsilon_n} \int \frac{d\alpha_1}{4\pi} \cdots \frac{d\alpha_n}{4\pi} \frac{1}{n!} e^{-i\sum_j P(p_j)(x-y)} f_{\epsilon_1 \cdots \epsilon_n}^{\mathcal{O}_1}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) f_{\bar{\epsilon}_n \cdots \bar{\epsilon}_1}^{\mathcal{O}_2}(\alpha_n + i\pi, \dots, \alpha_1 + i\pi). \end{aligned} \tag{2.16}$$

Gilt  $\mathcal{O} = \mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_2$  und ist dieser Operator hermitesch, so kann das Produkt der Formfaktoren offenbar ersetzt werden durch  $|f_{\epsilon_1 \dots \epsilon_n}^{\mathcal{O}}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)|^2$ . In der Regel sind diese Darstellungen nicht explizit summierbar. In der Praxis reicht jedoch für numerische Auswertungen auch die Berücksichtigung des Zweiteilchen-Formfaktors oder zumindest solcher mit sehr wenig Teilchen. So wurden in [33] und [34] die abgebrochenen Reihen von exakten Formfaktoren mit Gitterrechnungen und Störungstheorie verglichen und sehr gute Übereinstimmungen erzielt, selbst wenn nur Terme mit  $n = 2, 4, 6$  berücksichtigt wurden. Weitere Möglichkeiten der analytischen Behandlung bestehen in der Untersuchung des asymptotischen Verhaltens.

### 2.3 Zusammenstellung der Formfaktoraxiome

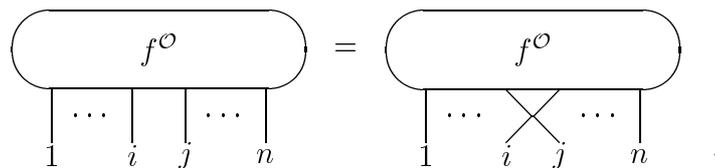
Im bisherigen Teil dieses Kapitels wurden rapiditätsabhängige Formfaktoren eingeführt und deren Eigenschaften bewiesen. Jetzt soll wie schon bei der  $S$ -Matrix zu einem eher axiomatischen und formalisierten Ansatz übergegangen werden. Wie im Abschnitt über die  $S$ -Matrix seien für jeden Index  $i$  Vektorräume  $V^i \cong \mathbb{C}^N$  gegeben, deren Basisvektoren sämtliche Teilchen des Modells durchnummerieren. Außerdem sei wieder  $V^{1 \dots n} = V^1 \otimes \dots \otimes V^n$ . Die Dualräume werden mit unteren Indizes gekennzeichnet. Die Ladungskonjugationsmatrizen  $\mathbf{C}_{ij}$  und  $\mathbf{C}^{ij}$  sind gegeben durch  $[\mathbf{C}_{ij}]_{\beta\alpha} = \delta_{\beta\alpha}$  bzw.  $[\mathbf{C}^{ij}]^{\beta\alpha} = \delta^{\beta\alpha}$ .

**Definition 2 (Formfaktoraxiome).** Eine kovektorwertige Funktion  $f : \mathbb{C}^n \rightarrow V_{1 \dots n}$  heißt bosonische Formfaktorfunktion, falls sie folgende Eigenschaften besitzt:

1. Sie ist verträglich mit der  $S$ -Matrix des Systems im Sinne von

$$f_{1 \dots i j \dots n}^{\mathcal{O}}(\theta_1, \dots, \theta_i, \theta_j, \dots, \theta_n) = f_{1 \dots j i \dots n}^{\mathcal{O}}(\theta_1, \dots, \theta_j, \theta_i, \dots, \theta_n) \dot{S}_{ij}(\theta_i - \theta_j). \quad (2.17)$$

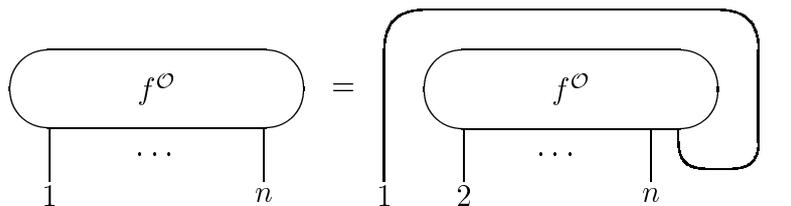
Diese üblicherweise „Watson-Gleichung“ genannte Eigenschaft besitzt die Darstellung



2. Bezüglich zyklischer Vertauschungen der Argumente verhält sie sich wie

$$f_{1 \dots n}^{\mathcal{O}}(\theta_1, \dots, \theta_n) = f_{2 \dots n 1}^{\mathcal{O}}(\theta_2, \dots, \theta_n, \theta_1 - 2\pi i). \quad (2.18)$$

Diese „zyklische Gleichung“ wird dargestellt über



Liegt  $\theta_1$  in der Nähe von Singularitäten ist auf die richtige Beschreibung des Formfaktors als Randwert einer analytischen Funktion zu achten, d.h. links ist  $\theta_1 - i0$  und rechts  $\theta_1 + i0$  zu setzen.



Ausdruck als adjungiert zu  $Z^\epsilon(\alpha)$  auffassen wollen. Die folgende Definition und ihre Anwendungen gehen auf die Brüder Zamolodchikov zurück [38].

**Definition 3 (Zamolodchikov-Algebra).** Sei  $S$  die  $S$ -Matrix einer beliebigen integrierbaren Quantenfeldtheorie in  $1 + 1$  Dimensionen. Sie besitze also die üblichen Eigenschaften wie Faktorisierung, Unitarität und Crossing-Symmetrie (vgl. Definition 1). Dann heißt  $M$  Zamolodchikov-Algebra, falls die Elemente die folgenden Vertauschungsrelationen erfüllen<sup>8</sup>:

$$Z^{\epsilon_1}(\alpha_1)Z^{\epsilon_2}(\alpha_2) = S_{\epsilon_1' \epsilon_2'}^{\epsilon_2 \epsilon_1}(\alpha_2 - \alpha_1)Z^{\epsilon_2'}(\alpha_2)Z^{\epsilon_1'}(\alpha_1) \quad (2.22)$$

$$Z_{\epsilon_1}^\dagger(\alpha_1)Z_{\epsilon_2}^\dagger(\alpha_2) = Z_{\epsilon_2'}^\dagger(\alpha_2)Z_{\epsilon_1'}^\dagger(\alpha_1)S_{\epsilon_1' \epsilon_2'}^{\epsilon_2' \epsilon_1'}(\alpha_1 - \alpha_2) \quad (2.23)$$

$$Z^{\epsilon_1}(\alpha_1)Z_{\epsilon_2}^\dagger(\alpha_2) = Z_{\epsilon_2'}^\dagger(\alpha_2)S_{\epsilon_2 \epsilon_1'}^{\epsilon_1 \epsilon_2'}(\alpha_2 - \alpha_1)Z^{\epsilon_1'}(\alpha_1) + 2\pi\delta_{\epsilon_2}^{\epsilon_1}\delta(\alpha_1 - \alpha_2). \quad (2.24)$$

Die Operatoren  $Z^\epsilon(\alpha)$  werden als Vektoren aufgefaßt, die Operatoren  $Z_c^\dagger(\alpha)$  als Kovektoren.

Es stellen sich unmittelbar zwei Fragen:

1. Ist die Definition konsistent?
2. Welche physikalische Bedeutung hat die Zamolodchikov-Algebra?

Wir werden die erste Frage für einen Moment beiseite lassen und die Definition ein wenig physikalisch motivieren. Wie eingangs erwähnt, soll der diskrete Parameter  $\epsilon$  als innere Quantenzahl und  $\alpha$  als Rapidität interpretiert werden. Nehmen wir an, wir hätten eine freie Theorie. Die  $S$ -Matrix der Streuung zweier Fermionen wäre dann  $S = -1$  und die Vertauschungsrelationen (2.22)-(2.24) würden genau die Vertauschungsrelationen von fermionischen Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren reproduzieren. Analog verhält es sich bei Streuprozessen, an denen ein Boson beteiligt ist. Dort ist  $S = 1$ , und die Zamolodchikov-Algebra wird durch die herkömmlichen Vertauschungsrelationen von bosonischen Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren definiert. Dies alles und (2.25) werden uns dazu führen, die Operatoren  $Z_c^\dagger(\alpha)$  und  $Z^\epsilon(\alpha)$  als Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren rapiditätsgeordneter Zustände aufzufassen.

Doch zuerst ist zu überprüfen, ob die Definition der Zamolodchikov-Algebra konsistent ist. Adjungiert man Gleichung (2.22), die in Vektorschreibweise

$$Z^1(\alpha_1)Z^2(\alpha_2) = S_{12}(\alpha_1 - \alpha_2)Z^2(\alpha_2)Z^1(\alpha_1)$$

lautet, so erhält man wegen der Unitarität der  $S$ -Matrix (1.15)

$$Z_2^\dagger(\alpha_2)Z_1^\dagger(\alpha_1) = Z_1^\dagger(\alpha_2)Z_2^\dagger(\alpha_1)S_{12}^\dagger(\alpha_1 - \alpha_2) = Z_1^\dagger(\alpha_2)Z_2^\dagger(\alpha_1)S_{21}(\alpha_2 - \alpha_1),$$

das ist gerade (2.23) in Vektorschreibweise. (2.22) und (2.23) sind also äquivalent, weshalb in der Definition auf eine dieser Gleichungen verzichtet werden könnte.

Außerdem muß geprüft werden, ob zweimalige Vertauschung wieder die Identität ergibt. Die Gleichung

$$Z^1(\alpha_1)Z^2(\alpha_2) = S_{12}(\alpha_1 - \alpha_2)Z^2(\alpha_2)Z^1(\alpha_1) = S_{12}(\alpha_1 - \alpha_2)S_{21}(\alpha_2 - \alpha_1)Z^1(\alpha_1)Z^2(\alpha_2)$$

---

<sup>8</sup>Die Indizes der  $S$ -Matrizen wurden gegenüber [16] dem Bild (1.9) angepaßt, d.h. die oberen Indizes der  $S$ -Matrix wurden vertauscht.

zeigt, daß dies erfordert, daß die  $S$ -Matrix unitär ist. Eine weitere Bedingung an  $S$  ergibt sich, wenn man das Produkt  $Z^1(\alpha_1)Z^2(\alpha_2)Z^3(\alpha_3)$  in das Produkt  $Z^3(\alpha_3)Z^2(\alpha_2)Z^1(\alpha_1)$  überführen möchte. Die zwei unterschiedlichen Arten, auf die das geschehen kann, erzwingen die Erfüllung der Yang-Baxter-Gleichung

$$S_{23}(\alpha_2 - \alpha_3)S_{13}(\alpha_1 - \alpha_3)S_{12}(\alpha_1 - \alpha_2) = S_{12}(\alpha_1 - \alpha_2)S_{13}(\alpha_1 - \alpha_3)S_{23}(\alpha_2 - \alpha_3).$$

Diese Bemerkung zeigt, daß die Zamolodchikov-Algebra speziell auf integrable Modelle der Quantenfeldtheorie zugeschnitten ist.

## 2.4.2 Rapiditätsgeordnete Zustände

Mit Hilfe der eben eingeführten Zamolodchikov-Algebra ist es möglich, Zustände zu definieren, indem man die  $Z_c^\dagger(\alpha)$  als Erzeugungsoperatoren und die  $Z^c(\alpha)$  als Vernichtungsoperatoren auffaßt<sup>9</sup>:

$$\begin{aligned} |(\alpha_1, \epsilon_1), \dots, (\alpha_n, \epsilon_n)\rangle &= Z_{\epsilon_1}^\dagger(\alpha_1) \cdots Z_{\epsilon_n}^\dagger(\alpha_n)|0\rangle \\ \langle(\alpha_n, \epsilon_n), \dots, (\alpha_1, \epsilon_1)| &= \langle 0|Z_{\epsilon_n}(\alpha_n) \cdots Z_{\epsilon_1}(\alpha_1). \end{aligned}$$

Wie üblich soll der Vernichtungsoperator das (eindeutige) Vakuum vernichten:  $Z^c(\alpha)|0\rangle = 0$ . Dies ist bis hierher erst einmal nur eine formale Definition, in der keine eigenständige physikalische Bedeutung gesucht werden sollte. Wichtig sind jedoch gewisse sich ergebende Analogien.

Interessant sind dabei vor allem die folgenden zwei Punkte:

1. Die Vertauschungsrelationen sind gerade so gewählt, daß sich bei einem Matrixelement

$$\langle(\alpha_n, \epsilon_n), \dots, (\alpha_1, \epsilon_1)|\mathcal{O}(0)|(\beta_1, \nu_1), \dots, (\beta_n, \nu_m)\rangle$$

gerade die Formfaktoreigenschaft (2.17) reproduziert.

2. In Verbindung mit dem ersten Punkt legt das physikalisch intuitive Bild

$\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3:$

(2.25)

nahe, bestimmte Zustände, in denen die Rapiditäten entweder aufsteigend oder absteigend geordnet sind, als physikalische in- bzw. out-Zustände aufzufassen (vgl. dazu (1.5)). In diesem konkreten Fall wäre  $|(\alpha_1, \epsilon_1), (\alpha_2, \epsilon_2), (\alpha_3, \epsilon_3)\rangle$  ein in-Zustand und  $|(\alpha_3, \epsilon_3), (\alpha_2, \epsilon_2), (\alpha_1, \epsilon_1)\rangle$  ein out-Zustand. Allgemein ist der rapiditätsgeordnete Zustand  $|(\alpha_1, \epsilon_1), \dots, (\alpha_n, \epsilon_n)\rangle$  ein in-Zustand für  $\alpha_1 > \dots > \alpha_n$  und ein out-Zustand für  $\alpha_1 < \dots < \alpha_n$ . Damit wäre die Verbindung zu den (rapiditätsabhängigen) Formfaktoren endgültig hergestellt (vgl. (2.8) und (2.10), sowie [16, 56, 57]).

<sup>9</sup>Soweit mir bekannt ist, wurden zwar schon konkrete Darstellungen der Zamolodchikov-Algebra für den Fall diagonalen  $S$ -Matrizen gefunden, jedoch noch nicht für andere. Siehe dazu z.B. [55].

Man mache sich noch einmal klar, daß der oben dargestellte Prozeß als Ganzes im Heisenbergbild durch einen einzigen Vektor dargestellt wird, d.h. die Vertauschung von Teilchen in den rapiditätsgeordneten Zuständen entspricht *nicht* einer Vertauschung in diesem *physikalischen* Zustand.

Die genannten Punkte veranlassen einen dazu, rapiditätsabhängige Formfaktoren über die Gleichung

$$f_{\mu_1 \dots \mu_n}^{\nu_1 \dots \nu_m}(\beta_1, \dots, \beta_m | \alpha_1, \dots, \alpha_n) = \langle (\beta_m, \nu_m), \dots, (\beta_1, \nu_1) | \mathcal{O}(0) | (\alpha_1, \mu_1), \dots, (\alpha_n, \mu_n) \rangle$$

einzuführen. Die Crossing-Relationen in Satz 1 haben gezeigt, wie diese Funktionen mit den eigentlichen Formfaktorfunktionen (die nur die zusammenhängenden Anteile beschreiben) in Verbindung gebracht werden können, falls die Mengen von Quantenzahlen nichtleeren Durchschnitt haben. Sollte sich der Operator  $\mathcal{O}(x)$  selbst in irgendeiner Weise durch die Operatoren  $Z^\epsilon(\alpha)$  und  $Z_c^\dagger(\alpha)$  darstellen lassen, müßten sich mit Hilfe der Vertauschungsrelationen (2.26) der Zamolodchikov-Algebra die allgemeinen Crossing-Relationen reproduzieren lassen. Diesem Gedanken wird später noch nachgegangen werden.

### 2.4.3 Verallgemeinerte Normalprodukte und Wick-Theorem

Im Rest dieses Kapitels sollen einige Schlußfolgerungen aus einem interessanten Ansatz gezogen werden, der in [39] zu finden ist. Dazu muß noch einmal geringfügig die Nomenklatur geändert werden. Sei  $S(\theta)$  eine analytische Funktion in  $\text{Im } \theta \in [0, \pi]$  mit den Eigenschaften

$$S(-\theta) = S(i\pi + \theta) = S^{-1}(\theta).$$

Für  $\theta \in \mathbb{R}$  wird die Zamolodchikov-Algebra generiert von Symbolen, die den Vertauschungsrelationen

$$\begin{aligned} Z(\alpha_1)Z(\alpha_2) &= S(\alpha_1 - \alpha_2)Z(\alpha_2)Z(\alpha_1) \\ Z^\dagger(\alpha_1)Z^\dagger(\alpha_2) &= S(\alpha_1 - \alpha_2)Z^\dagger(\alpha_2)Z^\dagger(\alpha_1) \\ Z(\alpha_1)Z^\dagger(\alpha_2) &= S^{-1}(\alpha_1 - \alpha_2)Z^\dagger(\alpha_2)Z(\alpha_1) + 2\pi\delta(\alpha_1 - \alpha_2) \end{aligned}$$

genügen. Setzt man für  $\theta \in \mathbb{R}$  weiter<sup>10</sup>

$$Z^\dagger(\theta) = Z(\theta - i\pi),$$

so lassen sich diese Vertauschungsrelationen für beliebige  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \cup \mathbb{R} - i\pi$  kompakt schreiben als

$$Z(\alpha_1)Z(\alpha_2) = S(\alpha_1 - \alpha_2)Z(\alpha_2)Z(\alpha_1) + 2\pi\delta(\alpha_1 - \alpha_2 - i\pi). \quad (2.26)$$

Dabei verschwindet die  $\delta$ -Funktion für Argumente mit Imaginärteil ungleich 0, so daß sie nur einen Beitrag liefert, falls  $\alpha_1 \in \mathbb{R}$  und  $\alpha_2 \in \mathbb{R} - i\pi$ .

Der nächste Schritt besteht darin, ein Normalprodukt dieser Operatoren einzuführen, das es erlaubt, alle singulären Bestandteile eines Produktes von Operatoren zu vernachlässigen bzw. in Kontraktionen zu verlagern, über die sich leichter Buch führen läßt. Das Vorgehen ist analog zum Buch von Bogolyubov [6]. Dazu setze für  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \cup \mathbb{R} - i\pi$

$$\overline{Z(\alpha_1)Z(\alpha_2)} = : Z(\alpha_1)Z(\alpha_2) : + \overline{Z(\alpha_1)Z(\alpha_2)}.$$

<sup>10</sup>Die Konsistenz der Vertauschungsrelationen ist wegen der Crossing-Symmetrie von  $S$  gewahrt!

Das verallgemeinerte Normalprodukt  $:\cdots:$  ist dabei wie üblich definiert über die Bedingung

$$\langle 0 | : Z(\alpha_1) Z(\alpha_2) : | 0 \rangle = 0.$$

Anders ausgedrückt sorgt es dafür, daß Erzeugungsoperatoren links stehen und Vernichtungsoperatoren rechts. Die Kontraktion erfüllt dann offenbar die Gleichung

$$\overbrace{Z(\alpha_1) Z(\alpha_2)} = \langle 0 | Z(\alpha_1) Z(\alpha_2) | 0 \rangle = 2\pi\delta(\alpha_1 - \alpha_2 - i\pi). \quad (2.27)$$

Ein verallgemeinertes Normalprodukt von mehreren Operatoren wird definiert durch

$$\begin{aligned} : Z^\dagger(\alpha_1) \cdots Z^\dagger(\alpha_n) Z(\beta_1) \cdots Z(\beta_m) : &= Z^\dagger(\alpha_1) \cdots Z^\dagger(\alpha_n) Z(\beta_1) \cdots Z(\beta_m) \\ : Z(\alpha_1) \cdots Z(\alpha_i) Z(\alpha_j) \cdots Z(\alpha_n) : &= S(\alpha_i - \alpha_j) : Z(\alpha_1) \cdots Z(\alpha_j) Z(\alpha_i) \cdots Z(\alpha_n) :, \end{aligned}$$

wobei die erste Zeile für  $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$  und die zweite für beliebige  $\alpha_i$  definiert ist. Nun muß nur noch festgelegt werden, wie Kontraktionen eines Normalprodukts aufgelöst werden, d.h. wie (symbolische) Kontraktionen aus dem Inneren des Normalproduktes vor das Normalprodukt gezogen werden können, wo es dann eine wirkliche Kontraktion, also eine reellwertige Distribution ist. Dazu definieren wir rekursiv

$$:\overbrace{Z(\alpha_1) \cdots Z(\alpha_i) Z(\alpha_{i+1}) \cdots Z(\alpha_n)} := Z(\alpha_i) Z(\alpha_{i+1}) : \overbrace{Z(\alpha_1) \cdots Z(\alpha_{i-1}) Z(\alpha_{i+2}) \cdots Z(\alpha_n)} :,$$

d.h. Kontraktionen von Operatoren, die nebeneinander stehen, können unabhängig von weiteren Kontraktionen vor das Normalprodukt gezogen werden. Gegebenenfalls muß durch Anwendung der Vertauschungsrelationen (2.26) dafür gesorgt werden, daß diese Rekursionsformel anwendbar ist. Dabei ist jedoch darauf zu achten, daß die Reihenfolge der Operatoren, die miteinander kontrahiert werden sollen, die gleiche ist wie vor den Vertauschungen. Dies hat den einfachen Grund, daß die Operatoren in einer Kontraktion nicht vertauscht werden dürfen, da (2.27) durch das  $-i\pi$  in der  $\delta$ -Funktion asymmetrisch ist. Es kann leicht gezeigt werden, daß das Endergebnis unabhängig von der Reihenfolge ist, in der die Kontraktionen herausgezogen werden. Außerdem entspricht jede Überschneidung der Kontraktionsbalken in der Ausgangskonfiguration im Endergebnis genau einer  $S$ -Matrix, die mit den entsprechenden Rapiditäten verknüpft ist. Dies läßt sich schnell anhand des Beispiels

$$:\overbrace{Z(\alpha_1) Z(\alpha_2) Z(\alpha_3) Z(\alpha_4)} := Z(\alpha_1) Z(\alpha_3) Z(\alpha_2) Z(\alpha_4) : S(\alpha_2 - \alpha_3).$$

einsehen, wobei die Vertauschungsrelation (2.26) verwendet worden ist. Die gleiche Überlegung läßt sich auch für kompliziertere Ausdrücke durchführen.

In Anhang B findet sich der Beweis für das folgende

### Theorem 3 (Verallgemeinertes Wick-Theorem).

Für die verallgemeinerten Normalprodukte gelten die Gleichungen<sup>11</sup>

$$Z(\alpha_1) \cdots Z(\alpha_n) = \sum_{\forall \text{Kontr.}} : \overbrace{Z(\alpha_1) \cdots \cdots \cdots Z(\alpha_n)} : \quad (2.28)$$

<sup>11</sup>Die Summe über alle Kontraktionen schließt insbesondere auch den Fall ein, daß keine Kontraktion auftritt!

Die Bedeutung des Wicktheorems liegt in der Einfachheit der Bestimmung von Vakuumerwartungswerten. Da die Vakuumerwartungswerte von Normalprodukten definitionsgemäß verschwinden, müssen in (2.28) dann nur die vollständigen Kontraktionen berücksichtigt werden:

$$\langle 0|Z(\alpha_1)\cdots Z(\alpha_n)|0\rangle = \sum_{\text{vollst. Kontr.}} : \overbrace{Z(\alpha_1)\cdots\cdots\cdots Z(\alpha_n)} : :$$

Unter ausschließlicher Verwendung der Vertauschungsrelationen hätte man das gleiche Resultat erhalten. Die Einführung von Normalprodukten und Kontraktionen sowie das Wick-Theorem erlauben jedoch eine wesentlich übersichtlichere Darstellung der zugrundeliegenden kombinatorischen Überlegungen.

### 2.4.4 Alternative Definition der Formfaktoren

Der Weg  $\mathcal{C}$  sei gegeben durch die Menge  $\mathcal{C} = (\mathbb{R} - i0) \cup (\mathbb{R} - i\pi + i0)$ , wobei beide Linien von links nach rechts durchlaufen werden. Die Bedeutung der infinitesimalen Verschiebungen wird später deutlich. Es soll angenommen werden, daß sich ein lokaler Operator  $\mathcal{O}(x)$  entwickeln läßt gemäß

$$\mathcal{O}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{\mathcal{C}} \frac{d\alpha_1}{2\pi} \cdots \int_{\mathcal{C}} \frac{d\alpha_n}{2\pi} e^{-iP(\alpha_1, \dots, \alpha_n)x} f_{(n)}^{\mathcal{O}}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) : Z(\alpha_n)\cdots Z(\alpha_1) : \quad (2.29)$$

mit gewissen Entwicklungskoeffizienten  $f_{(n)}^{\mathcal{O}}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ .  $P(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  ist der Gesamtimpuls zu den Rapiditäten  $\alpha_i$ .

Durch Umbenennung  $(\alpha_i, \alpha_{i+1}) \rightarrow (\alpha_{i+1}, \alpha_i)$  und Verwendung der Vertauschungsrelationen (2.26) für die  $Z$  erkennt man sofort, daß die Beziehung

$$f_{(n)}^{\mathcal{O}}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = S(\alpha_i - \alpha_{i+1}) f_{(n)}^{\mathcal{O}}(\alpha_1, \dots, \alpha_{i+1}, \alpha_i, \dots, \alpha_n)$$

erfüllt sein muß. Dies liefert einen ersten Hinweis darauf, daß die Funktionen  $f_{(n)}^{\mathcal{O}}$  als Formfaktoren interpretiert werden können. Ob dies tatsächlich der Fall ist, läßt sich leicht feststellen, indem man Matrixelemente des Operators mit rapiditätsgeordneten Zuständen betrachtet. Dabei ergibt sich für  $\beta_i \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} & \langle 0|\mathcal{O}(0)|\beta_1 \cdots \beta_m\rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{\mathcal{C}} \frac{d\alpha_1}{2\pi} \cdots \int_{\mathcal{C}} \frac{d\alpha_n}{2\pi} f_{(n)}^{\mathcal{O}}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \langle 0| \left( : Z(\alpha_n)\cdots Z(\alpha_1) : \right) Z^\dagger(\beta_1)\cdots Z^\dagger(\beta_m)|0\rangle. \end{aligned}$$

Das Wick-Theorem besagt

$$\begin{aligned} & \langle 0| \left( : Z(\alpha_n)\cdots Z(\alpha_1) : \right) Z^\dagger(\beta_1)\cdots Z^\dagger(\beta_m)|0\rangle \\ &= \sum_{\text{vollst. Kontr.}} : \left( : Z(\alpha_n)\cdots Z(\alpha_1) : \right) \overbrace{Z(\beta_1 - i\pi)\cdots Z(\beta_m - i\pi)} : : \end{aligned}$$

Da die Kontraktionen *innerhalb* der Gruppen  $\{\alpha_i\}$  (Vernichtungsoperatoren rechts!) bzw.  $\{\beta_i\}$  (alles Erzeugungsoperatoren) verschwinden, bleiben bloß Kontraktionen zwischen diesen beiden Gruppen ( $\Rightarrow n = m$ ). Diese sind nur dann ungleich 0, falls  $\alpha_i \in \mathbb{R}$ .



- (b) Insgesamt  $l - D$  Kontraktionen zwischen  $\beta_{l-D-i}$  und  $\alpha_{n+1-i}$  ( $i = 1, \dots, l - D + 1$ ). Diese implizieren  $\delta$ -Funktionen, die die Integration über die untere Linie aufheben (die obere liefert hier keinen Beitrag) und die Ersetzung  $\alpha = \beta - i\pi + 0$  in den Formfaktoren erzwingen.
- (c) Insgesamt  $m - D$  Kontraktionen zwischen  $\alpha_{l-D-i}$  und  $\gamma_{n+1-i}$  ( $i = 1, \dots, l - D + 1$ ). Diese implizieren  $\delta$ -Funktionen, die die Integration über die obere Linie aufheben (die untere liefert hier keinen Beitrag) und die Ersetzung  $\alpha = \gamma$  in den Formfaktoren erzwingen. Natürlich gibt es nur Beiträge, wenn die Zahlen der Operatoren so aufeinander abgestimmt sind, daß vollständige Kontraktionen möglich sind.

Die oben angegebene spezielle Kontraktion liefert also den genannten Punkten gemäß den Anteil

$$f_{(n)}^{\mathcal{O}}(\gamma_1, \dots, \gamma_{m-D}, \beta_{l-D} - i\pi + i0, \dots, \beta_1 - i\pi + i0)(2\pi)^D \prod_{i=0}^{D-1} \delta(\gamma_{m-i} - \beta_{l-i}). \quad (2.30)$$

Die Beiträge beliebiger Kontraktionen lassen sich nun leicht bestimmen, indem sie durch Ausnutzung der Kommutationsbeziehungen (2.26) auf die obige Form gebracht werden. Um die komplizierte Kombinatorik in den Griff zu bekommen, gruppieren wir die Rapiditäten entsprechend ihrer Bedeutung. So definieren wir die Mengen  $\overrightarrow{C} = \{\gamma_1, \dots, \gamma_m\}$  und  $\overleftarrow{B} = \{\beta_l \dots \beta_1\}$ , wobei der Pfeil die Richtung aufsteigender Indizes andeutet und Mengen mit unterschiedlicher Ordnung der Elemente unterschieden werden sollen. Das Problem besteht darin, für die Rapiditäten im Ausdruck

$$\overleftarrow{B} \quad \overleftarrow{A} \quad \overrightarrow{C}$$

alle vollständigen Kontraktionen anzugeben. In der Menge  $B$  gibt es eine Teilmenge  $B_Z$ , die mit Elementen aus  $A$  kontrahiert wird, und eine andere  $B_N$ , die mit solchen aus  $C$  kontrahiert wird. Die zuletzt genannten Kontraktionen enthalten äußere  $\delta$ -Funktionen, daher der Index  $N$  für nichtzusammenhängend. Der Index  $Z$  steht umgekehrt für zusammenhängend, da dort nur  $\delta$ -Funktionen entstehen, die ausintegriert werden. Analog zerlegen wir die Menge  $C$ , so daß wir  $\overleftarrow{B} = \overleftarrow{B}_N \cup \overleftarrow{B}_Z$  und  $\overrightarrow{C} = \overrightarrow{C}_Z \cup \overrightarrow{C}_N$  haben. Die Vereinigung zweier Mengen bedeutet in diesem Zusammenhang, die Elemente der zweiten Menge an die der ersten Menge hinten anzufügen. Man beachte, daß in  $B$  und  $C$  im allgemeinen Elemente der jeweiligen Teilmengen beliebig nebeneinander stehen und daher der Pfeil unbedingt notwendig ist. Mit dieser Nomenklatur sind die vollständigen Kontraktionen des Ausdrucks

$$\overleftarrow{B}_N \cup \overleftarrow{B}_Z \quad \overleftarrow{A}_1 \cup \overleftarrow{A}_2 \quad \overrightarrow{C}_Z \cup \overrightarrow{C}_N$$

zu bestimmen. Durch die Anwendung der Vertauschungsrelationen (2.26) lassen sich die Mengen entkoppeln gemäß  $\overleftarrow{B}_N \cup \overleftarrow{B}_Z \rightarrow \overleftarrow{B}_N \cup \overleftarrow{B}_Z$ ,  $\overrightarrow{C}_Z \cup \overrightarrow{C}_N \rightarrow \overrightarrow{C}_Z \cup \overrightarrow{C}_N$  und  $\overleftarrow{A}_1 \cup \overleftarrow{A}_2 = \overleftarrow{A}_1 \cup \overleftarrow{A}_2$ , wobei Permutationen in  $A$  nur den Faktor  $n!$  kompensieren. Das Ergebnis ist eine Summe über alle Ausdrücke der Form

$$\overleftarrow{B}_N \cup \overleftarrow{B}_Z \quad \overleftarrow{A}_1 \cup \overleftarrow{A}_2 \quad \overrightarrow{C}_Z \cup \overrightarrow{C}_N \quad \times \left( S\text{-Matrizen} \right) \quad (2.31)$$

Schreiben wir symbolisch  $S(\vec{B} \leftarrow \vec{B}_Z \cup \vec{B}_N)$  für das Produkt von  $S$ -Matrizen, das die Entkopplung für  $B$  induziert, und analog  $S(\vec{C}_Z \cup \vec{C}_N \leftarrow \vec{C})$  im Fall von  $C$ , sowie die entstehenden  $\delta$ -Funktionen  $\Delta(B_N \leftarrow C_N)$ , so erhalten wir mit (2.30) schließlich die allgemeine Crossing-Formel

$$\begin{aligned} & \langle \vec{B} | \mathcal{O}(0) | \vec{C} \rangle \\ &= \sum_{\substack{B=B_Z \cup B_N \\ C=C_Z \cup C_N}} S(\vec{B} \leftarrow \vec{B}_Z \cup \vec{B}_N) f^\mathcal{O}(\vec{C}_Z, \vec{B}_Z - i\pi + i0) \Delta(\vec{B}_N \leftarrow \vec{C}_N) S(\vec{C}_Z \cup \vec{C}_N \leftarrow \vec{C}). \end{aligned} \quad (2.32)$$

Die jeweiligen  $S$ -Matrizen können im konkreten Einzelfall leicht angegeben werden.

An dieser Stelle soll das Verfahren noch kurz anhand des Matrixelements

$$\langle \beta | \mathcal{O}(0) | \gamma_1 \cdots \gamma_m \rangle$$

veranschaulicht werden. In der Nomenklatur von eben sind hier nur Beiträge möglich, falls  $n = m - 1$  oder  $n = m + 1$ . Im ersten Fall wird  $\beta$  mit einem beliebigen  $\gamma_j$  kontrahiert, im zweiten Fall mit  $\alpha_n$ . Schematisch sind also die vollständigen Kontraktionen durch

$$\sum_j \left[ \overbrace{\beta \quad \alpha_{m-1} \cdots \alpha_1 \quad \gamma_1 \cdots \gamma_j \cdots \gamma_m}^{\text{---}} + \beta \quad \alpha_{m+1} \alpha_m \cdots \alpha_1 \quad \gamma_1 \cdots \gamma_m \right]$$

gegeben. Im ersten Term lassen sich die notwendigen  $S$ -Matrizen leicht ablesen. Es gilt also

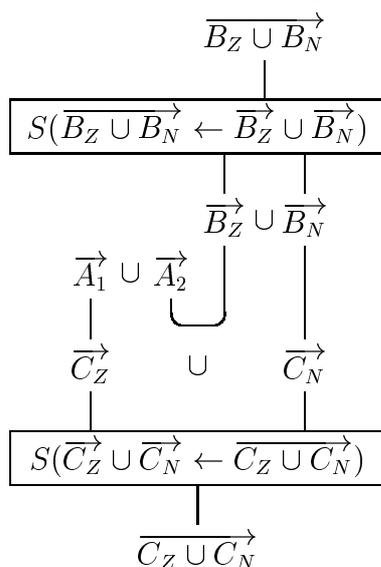
$$\begin{aligned} & \langle \beta | \mathcal{O}(0) | \gamma_1 \cdots \gamma_m \rangle \\ &= \sum_j f^\mathcal{O}(\gamma_1, \dots, \hat{\gamma}_j, \dots, \gamma_m) 2\pi \delta(\beta - \gamma_j) \prod_{i=j+1}^m S(\gamma_j - \gamma_i) + f^\mathcal{O}(\gamma_1, \dots, \gamma_m, \beta - i\pi + i0). \end{aligned}$$

Man vergleiche diese Formel mit Gleichung (2.13). Außerdem beachte man die entstehende graphische Darstellung, wenn die  $\beta$ 's (so es denn mehrere sind), die  $\gamma$ 's und alle mit ihnen verbundenen Linien wie folgt gedreht werden:

$$\sum_j \left[ \begin{array}{c} \alpha_1 \cdots \alpha_{m-1} \\ | \quad \cdots \quad | \\ \gamma_1 \cdots \gamma_j \cdots \gamma_m \end{array} \right] \beta + \begin{array}{c} \alpha_1 \cdots \alpha_m \alpha_{m+1} \\ | \quad \cdots \quad | \\ \gamma_1 \cdots \gamma_m \end{array} \beta$$

Analog kann im allgemeinen Fall verfahren werden. Verwendet man einen Kasten zur Darstellung der  $S$ -Matrizen, die die Entkopplung der Rapiditäten bewirken, erhält man

ausgehend von (2.31) nach der Drehung der Mengen  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $B_Z$  und  $B_N$  das Diagramm



Insbesondere kann nun auch besser verstanden werden, wieso in der oben angegebenen allgemeinen Crossing-Formel (2.32) die Pfeile über den  $B$ 's umgedreht worden sind. Im nächsten Kapitel wird bewiesen, daß man mit der traditionellen Methode durch Iteration der Gleichungen (2.13) die gleiche Crossing-Formel erhält. Man vergleiche dazu die oben angegebene graphische Darstellung mit der aus Satz 9 in Kapitel 4.



# Kapitel 3

## Das Bootstrap-Programm

### 3.1 Das allgemeine Vorgehen

Das Bootstrap-Programm ist ein Programm zur *Klassifikation* aller möglichen  $S$ -Matrizen von integralen Modellen in  $1 + 1$  Dimensionen. Die Grundlage wird gebildet durch die Forderung einiger Eigenschaften für die  $S$ -Matrix, wie sie in Definition 1 zusammengestellt sind. Diese beinhalten

1. allgemeine Eigenschaften wie Unitarität und Crossing-Symmetrie;
2. spezielle Eigenschaften in integralen Theorien
  - a) Faktorisierung und Yang-Baxter-Gleichung
  - b) Bootstrap-Gleichung (Fusionsgleichung)
  - c) maximale Analytizität.

Der Ausgangspunkt einer konkreten Realisierung einer  $S$ -Matrix, die die oben genannten Bedingungen erfüllt, ist ein bestimmtes vorgegebenes „Modell“. Mit „Modell“ ist dabei die Angabe der auftretenden Teilchen und ihrer Symmetrien gemeint, insbesondere das Spektrum gebundener Zustände. Das Bootstrap-Programm und in dessen Verallgemeinerung das Formfaktor-Programm<sup>1</sup> ist ein systematisches Verfahren, aus diesen Ausgangsinformationen sämtliche relevanten quantenfeldtheoretischen Größen zu bestimmen, also vor allen Dingen die Korrelationsfunktionen, aus denen alles andere berechnet werden kann (vgl. [54]). Wie aus dieser Beschreibung ersichtlich ist, nimmt das Bootstrap-Programm keinerlei Bezug auf eine Formulierung über Lagrange-Dichten oder ähnlichem. Die Verbindung von Ergebnissen des Bootstrap-Programms zu Modellen, die auf andere Art und Weise definiert sind, kann störungstheoretisch oder über Analogien im Teilchenspektrum nachvollzogen werden.

Nach der Wahl eines Modells sind im Bootstrap-Programm folgende Schritte durchzuführen:

1. Bestimmung von exakten  $S$ -Matrizen aus den  $S$ -Matrix-Axiomen in Definition 1 unter Berücksichtigung der postulierten Teilchen und ihrer Symmetrien. Unter Umständen kann es vorkommen, daß aus Konsistenzgründen neue Teilchen auftreten.

---

<sup>1</sup>Hier werden beide Begriffe synonym verwendet.

2. Bestimmung von möglichen verallgemeinerten Formfaktorfunktionen aus den Formfaktoraxiomen in Definition 2. Hier wird es verschiedene Lösungen geben, die zu unterschiedlichen Operatoren gehören. Darum ist eine Klassifikation der erhaltenen Lösungen zum Beispiel nach Symmetrieeigenschaften wünschenswert.
3. Zuordnung der berechneten Formfaktorfunktionen zu Operatoren. Dies kann störungstheoretisch und/oder über exakte Prinzipien geschehen, wie zum Beispiel das asymptotische Verhalten.
4. Bestimmung der Korrelationsfunktionen aus den Formfaktoren gemäß Gleichung (2.16).

Im nächsten Kapitel wird nachgewiesen, daß die  $S$ -Matrix- und Formfaktoraxiome der Definitionen 1 und 2 gerade ausreichen, eine lokale Theorie zurückzuerhalten. Bevor wir uns dem Beweis der zuletzt genannten Behauptung zuwenden, sollen jedoch erst einmal einige Beispiele für die Anwendung des Bootstrap-Programms vorgestellt werden, wobei nur auf den für die späteren Betrachtungen wichtigen ersten Punkt eingegangen werden wird. Konkret werden das Sinus-Gordon-Modell, sowie das  $Z(N)$ -Ising-Modell vorgestellt und jeweils Phasenkonventionen für die in Abschnitt 1.3.7 definierten und in (1.19) und (2.20) auftretenden Intertwiner angegeben, so daß eine konsistente Beschreibung dieser beiden Modelle im Rahmen der neu eingeführten Gleichungssysteme aus den Definitionen 1 und 2 möglich ist. Im Sinus-Gordon-Modell wird in diesem Zusammenhang ein in der Literatur noch nicht diskutierter Fusionsprozeß postuliert und seine Existenz bewiesen. Dieser Prozeß ist unverzichtbarer Bestandteil im Beweis der Lokalität, der im nächsten Kapitel erbracht wird.

Das einzige Modell, für das das vollständige Bootstrap-/Formfaktor-Programm durchgeführt werden konnte, ist das  $Z(2)$ -Ising-Modell [54], das mit dem Ising-Modell der statistischen Physik im Skalenlimes verbunden ist. Wir beginnen die Diskussion hier mit seiner Verallgemeinerung, dem  $Z(N)$ -Ising-Modell.

## 3.2 Das $Z(N)$ -Ising-Modell

### 3.2.1 Definition des Modells und Bestimmung der $S$ -Matrix

Es soll angenommen werden, daß in dem Modell ein „elementares“<sup>2</sup> Boson  $b_1$  der Masse  $m_1 = m$  vorhanden ist, das in Zukunft einfach mit 1 abgekürzt werden soll. Daneben soll es einen gebundenen Zustand  $b_2 = 2 = (11) = (b_1 b_1)$  geben. Wird der imaginäre und momentan noch beliebige Bindungswinkel mit  $\vartheta = \theta_{11}^2 \in i(0, \pi)$  bezeichnet<sup>3</sup>, ergibt sich aus Abbildung 1.2 (linkes Bild) für seine Masse die Formel

$$m_2^2 = 2m^2(1 - \operatorname{ch}(i\pi - \vartheta)) = 2m^2(1 + \operatorname{ch} \vartheta) = 4m^2 \operatorname{ch}^2 \frac{\vartheta}{2}.$$

Mit  $a = \frac{\vartheta}{2i}$  ist die Masse also

$$m_2 = 2m \cos a = m \frac{2 \cos a \sin a}{\sin a} = m \frac{\sin 2a}{\sin a}.$$

---

<sup>2</sup>Man vergegenwärtige sich, daß in der Quantenfeldtheorie und damit auch im Bootstrap-Bild im Prinzip alle Teilchen gleichberechtigt, also auch gleich elementar sind.

<sup>3</sup>Die Zahlen stehen alle für Indizes, die 2 ist kein Exponent!

Tabelle 3.1: Übersicht über alle möglichen Fusionsprozesse im  $Z(N)$ -Modell

Prozeß	Rapidity des gebundenen Zustands	Bindungswinkel	Einschränkung
$b_k + b_l \longrightarrow b_{k+l}$	$\gamma_{b_k} \mp \frac{i\pi}{N}l = \gamma_{b_l} \pm \frac{i\pi}{N}k$	$\frac{i\pi}{N}(k+l)$	$k+l < N$
$b_k + b_l \longrightarrow b_{k+l-N}$	$\gamma_{b_k} \mp \frac{i\pi}{N}(N-l) = \gamma_{b_l} \pm \frac{i\pi}{N}(N-k)$	$\frac{i\pi}{N}(k+l-N)$	$k+l > N$

Eine Verallgemeinerung dieser geometrischen Überlegungen für den iterativ gebildeten gebundenen Zustand von  $k$  elementaren Teilchen  $b_k = k = (11 \cdots 1) = (b_1 \cdots b_1)$  ergibt die Massenformel

$$m_k = m \frac{\sin ka}{\sin a}.$$

Wegen der zu fordernden  $Z(N)$ -Symmetrie gilt  $b_{N-1} = \bar{b}_1$ . Insbesondere müssen die entsprechenden Massen übereinstimmen, was direkt zu der Bedingung

$$\frac{\sin(N-1)a}{\sin a} = 1$$

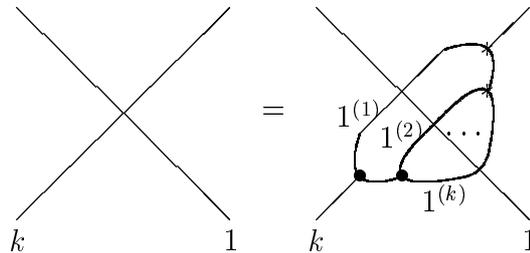
und damit zu  $a = \frac{\pi}{N}$  führt. Für den Bindungswinkel folgt daher  $\vartheta = \frac{2i\pi}{N}$ .

Die  $S$ -Matrix für die Streuung zweier Teilchen vom Typ 1 hat damit die Form

$$S_{11}(\theta) = \frac{\sin \frac{1}{2}(\theta + \frac{2\pi i}{N})}{\sin \frac{1}{2}(\theta - \frac{2i\pi}{N})}.$$

Sie ist durch eine skalare Funktion gegeben, für die demnach die Yang-Baxter-Gleichung (1.17) immer erfüllt ist. In [58] wurde gezeigt, daß diese Lösung unter Berücksichtigung der maximalen Analytizität eindeutig ist. Man beachte, daß genau ein Pol auftritt und zwar an der Stelle  $\theta = \theta_{11}^2 = \frac{2i\pi}{N}$ . Er entspricht dem gebundenen Zustand  $2 = (11)$ .

Mit Hilfe der Bootstrapregeln lassen sich daraus alle weiteren  $S$ -Matrixelemente ableiten. Wie das geschieht, soll an diesem relativ einfachen Beispiel vorgeführt werden. In einem ersten Schritt berechnen wir die  $S$ -Matrix für die Streuung eines Teilchens  $k = (1^{(1)} \cdots 1^{(k)})$  mit einem Teilchen 1. Dazu benutzen wir die Bootstrapgleichungen (1.19) in der Form, wie sie in der Abbildung



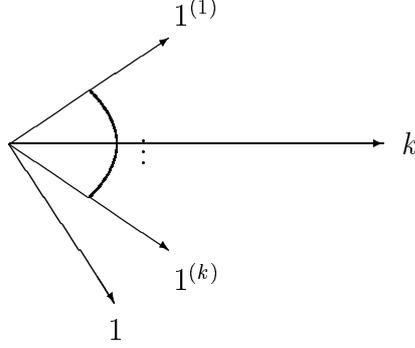
zu sehen sind. Die mit dem Stern  $*$  gekennzeichneten Größen sind dabei das Inverse der mit dem Punkt  $\bullet$  versehenen erweiterten Intertwiner. Wegen der Diagonalität der  $S$ -Matrizen heben sich die Intertwinerbeiträge gegenseitig auf, weshalb nur die  $S$ -Matrizen übrigbleiben. Danach gilt

$$S_{k1}(\theta_k - \theta_1) = S_{11}(\theta^{(1)} - \theta_1) \cdots S_{11}(\theta^{(k)} - \theta_1).$$

Tabelle 3.2: Phasenkonventionen und erweiterte Intertwiner für das  $Z(N)$ -Modell

Objekt	Wert	Objekt	Wert	Objekt	Wert	Objekt	Wert
$\phi_{kl}^{k+l}$	1	$\phi_{k+l}^{lk}$	1	$\eta_{kl}^{k+l}$	$i R_{kl}^{k+l} ^{\frac{1}{2}}$	$\eta_{k+l}^{lk}$	$i R_{kl}^{k+l} ^{\frac{1}{2}}$
$\phi_{N-k, N-l}^{N-k-l}$	1	$\phi_{N-k-l}^{N-l, N-k}$	1	$\eta_{N-k, N-l}^{N-k-l}$	$i R_{N-k, N-l}^{N-k-l} ^{\frac{1}{2}}$	$\eta_{N-k-l}^{N-l, N-k}$	$i R_{N-k, N-l}^{N-k-l} ^{\frac{1}{2}}$

Um die Winkel zu bestimmen, betrachten wir die Abbildung



Der Winkel  $\theta^{(j)} - \theta^{(j+1)}$  ist jeweils der Bindungswinkel  $\frac{2i\pi}{N}$ . Es ist dann offensichtlich, daß der Winkel zwischen  $1^{(1)}$  und  $1^{(k)}$  gerade  $\frac{2i\pi}{N}(k-1)$  beträgt. Allgemeiner findet man  $\theta^{(j)} - \theta^{(k)} = \frac{2i\pi}{N}(k-j)$ . Wegen  $\theta_k - \theta^{(k)} = \frac{1}{2} \frac{2i\pi}{N}(k-1)$  folgt  $\theta^{(j)} = \theta_k + \frac{i\pi}{N}(k-2j+1)$ . Setzt man nun  $\theta = \theta_k - \theta_1$ , erhält man  $\theta^{(j)} - \theta_1 = \theta^{(j)} - \theta_k + \theta = \theta + \frac{i\pi}{N}(k-2j+1)$ . Einsetzen ergibt

$$S_{k1}(\theta) = \frac{\text{sh} \frac{1}{2}(\theta + \frac{i\pi}{N}(k+1))}{\text{sh} \frac{1}{2}(\theta + \frac{i\pi}{N}(k-3))} \cdots \frac{\text{sh} \frac{1}{2}(\theta + \frac{i\pi}{N}(-k+3))}{\text{sh} \frac{1}{2}(\theta + \frac{i\pi}{N}(-k-1))}$$

$$= \frac{\text{sh} \frac{1}{2}(\theta + \frac{i\pi}{N}(k+1)) \text{sh} \frac{1}{2}(\theta + \frac{i\pi}{N}(k-1))}{\text{sh} \frac{1}{2}(\theta - \frac{i\pi}{N}(k-1)) \text{sh} \frac{1}{2}(\theta - \frac{i\pi}{N}(k+1))}.$$

Damit läßt sich nun analog die allgemeine  $S$ -Matrix  $S_{kl}(\theta)$  berechnen. Wie eben gilt

$$S_{kl}(\theta_k - \theta_l) = S_{k1}(\theta_k - \theta^{(1)}) \cdots S_{k1}(\theta_k - \theta^{(l)}).$$

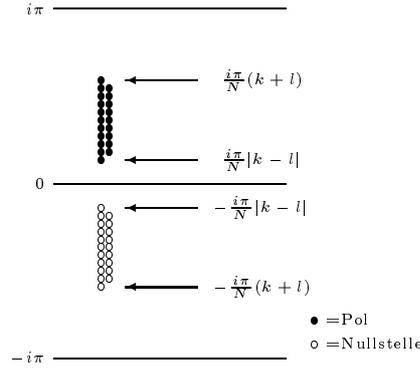
Mit  $\theta = \theta_k - \theta_l$  haben wir wie zuvor  $\theta_k - \theta^{(m)} = \theta + \frac{i\pi}{N}(2m-l-1)$ . Damit erhält man schließlich

$$S_{kl} = \prod_{m=-(l-1)}^{l-1} \frac{\text{sh} \frac{1}{2}(\theta + \frac{i\pi}{N}(k-m+1)) \text{sh} \frac{1}{2}(\theta - \frac{i\pi}{N}(k+m-1))}{\text{sh} \frac{1}{2}(\theta + \frac{i\pi}{N}(k-m-1)) \text{sh} \frac{1}{2}(\theta - \frac{i\pi}{N}(k+m+1))}. \quad (3.1)$$

Es läßt sich leicht überprüfen, daß diese  $S$ -Matrix die Unitarität (1.15) erfüllt. Außerdem genügt sie der Crossing-Relation (1.16), wenn allgemein  $\bar{b}_k = b_{N-k}$  gesetzt wird. Die Yang-Baxter-Gleichung (1.17) ist aufgrund des diagonalen Charakters der  $S$ -Matrix automatisch erfüllt. Die anderen  $S$ -Matrix-Axiome aus Definition 1 sind Gegenstand der Untersuchungen des nächsten Abschnitts.

### 3.2.2 Diskussion der gebundenen Zustände

Eine Analyse der Pol- und Nullstellenstruktur der  $S$ -Matrix  $S_{kl}$  ist für  $k+l < N$  in Abbildung 3.1 dargestellt (vgl. (3.1)). Aufgrund der Periodizität der sh-Funktion setzt

Abbildung 3.1: Pol- und Nullstellenstruktur der  $S$ -Matrix  $S_{kl}$  im  $Z(N)$ -Ising-Modell.

sich dies entsprechend in die anderen Streifen fort. Die  $S$ -Matrix (3.1) hat für  $k \neq l$  zwei einfache Pole an den Stellen  $\frac{i\pi}{N}(k+l)$  und  $\frac{i\pi}{N}|k-l|$  und dazwischen im Abstand  $\frac{2i\pi}{N}$  Doppelpole. Für  $k = l$  wird der Pol bei  $\frac{i\pi}{N}|k-l|$  durch eine Nullstelle kompensiert. Der Pol an der Stelle  $\frac{i\pi}{N}(k+l)$  ist mit dem Fusionsprozeß  $k+l = (kl)$  verbunden. Dies ist seit langer Zeit bekannt [58]. Die  $Z(N)$ -Symmetrie schließt aus, daß der andere Pol ebenfalls zu einem Fusionsprozeß gehört.

Aus Symmetriegründen folgt die Existenz des analogen Prozesses zu  $k+l = (kl)$  ( $k+l < N$ ) für die Antiteilchen, d.h.  $N-k-l = (N-k, N-l)$ . Wegen  $(N-k) + (N-l) = 2N - k - l < N$  für  $k+l > N$  hat man damit auch Fusionsprozesse  $k+l \rightarrow x$  für  $k+l > N$  erhalten, wobei jetzt untersucht werden soll, um welches Teilchen es sich bei  $x$  handelt. Wir nehmen die Beschreibung des Prozesses über die Antiteilchen vor:  $(kl) = (N - (N - k), N - (N - l)) = N - (N - k) - (N - l) = k + l - N = x$ . Diese Relation gibt eine weitere Bestätigung der Bezeichnung  $Z(N)$ -Modell: Letztendlich sind alle Teilchenzahlen mod  $N$  zu nehmen, d.h. im Prinzip kann man immer die Additionsregel anwenden und muß nur nachher darauf achten, daß die entstehende Teilchenzahl in den richtigen „Sektor“ zwischen 1 und  $N$  transformiert wird. In Tabelle 3.1 sind sämtliche Fusionsprozesse und ihre wichtigen Parameter aufgelistet<sup>4</sup>.

### 3.2.3 Konsistenz mit dem Bootstrap-Bild

In diesem Abschnitt soll eine Phasenkonvention für die Intertwiner und die erweiterten Intertwiner gefunden werden, die konsistent ist mit dem Bootstrap-Bild. Dazu benötigen wir erst einmal das

#### Lemma 4 (Residuen der $S$ -Matrizen im $Z(N)$ -Modell).

Die Residuen  $R_{kl}^{k+l} = \operatorname{Res}_{\theta=\frac{i\pi}{N}(k+l)} S_{kl}(\theta)$  und  $R_{N-k-l,l}^{N-k} = \operatorname{Res}_{\theta=\frac{i\pi}{N}(N-k)} S_{N-k-l,l}(\theta)$  der  $Z(N)$ - $S$ -Matrizen genügen der Beziehung

$$R_{kl}^{k+l} = R_{N-k-l,l}^{N-k} = 2i \sin \frac{\pi}{N} k \prod_{m=\frac{1}{2}, 1, \dots}^l \frac{\sin \frac{\pi}{N}(k+m)}{\sin \frac{\pi}{N} m}. \quad (3.2)$$

<sup>4</sup>Das Vorzeichen bei der Angabe zur Rapidität des gebundenen Zustands hängt davon ab, welches der beiden Teilchen die Rapidität mit dem größeren Imaginärteil hat, also im Sinne von Abbildung 1.2 links vom anderen steht.

*Beweis.* Der Pol von  $S_{kl}$  bei  $\frac{i\pi}{N}(k+l)$  liegt in dem Faktor, der in der Darstellung (3.1) zum Index  $m = l - 1$  gehört. Aufspaltung des Produkts und Berechnung des Residuums ergibt

$$\begin{aligned} R_{kl}^{k+l} &= \frac{\operatorname{sh} \frac{i\pi}{N}(k+1) \operatorname{sh} \frac{i\pi}{N}k}{\frac{1}{2} \operatorname{sh} \frac{i\pi}{N}} \cdot \frac{\operatorname{sh} \frac{i\pi}{N}(k+\frac{3}{2}) \operatorname{sh} \frac{i\pi}{N}(k+\frac{1}{2})}{\operatorname{sh} \frac{i\pi}{N} \frac{3}{2} \operatorname{sh} \frac{i\pi}{N} \frac{1}{2}} \dots \frac{\operatorname{sh} \frac{i\pi}{N}(k+l) \operatorname{sh} \frac{i\pi}{N}(k+l-1)}{\operatorname{sh} \frac{i\pi}{N} l \operatorname{sh} \frac{i\pi}{N}(l-1)} \\ &= 2 \operatorname{sh} \frac{i\pi}{N}k \prod_{m=\frac{1}{2}, 1, \dots}^l \frac{\operatorname{sh} \frac{i\pi}{N}(k+m)}{\operatorname{sh} \frac{i\pi}{N}m} = 2i \sin \frac{\pi}{N}k \prod_{m=\frac{1}{2}, 1, \dots}^l \frac{\sin \frac{\pi}{N}(k+m)}{\sin \frac{\pi}{N}m}. \end{aligned}$$

Zur Bestimmung von  $R_{N-k-l, l}^{N-k} = \operatorname{Res}_{\theta=\frac{i\pi}{N}(N-k)} S_{N-k-l, l}(\theta)$  verfahren wir wie oben. Der Pol sitzt wieder im Faktor für  $m = l - 1$ . Entwicklung des Produktes ergibt

$$\begin{aligned} R_{N-k-l, l}^{N-k} &= \frac{\operatorname{sh} \frac{i\pi}{N}(k+l-1) \operatorname{sh} \frac{i\pi}{N}(k+l)}{\operatorname{sh} \frac{i\pi}{N} \cdot \frac{1}{2}} \cdot \frac{\operatorname{sh} \frac{i\pi}{N}(N-k-l+\frac{3}{2}) \operatorname{sh} \frac{i\pi}{N}(N-k-l+\frac{1}{2})}{\operatorname{sh} \frac{i\pi}{N} \frac{3}{2} \operatorname{sh} \frac{i\pi}{N} \frac{1}{2}} \times \dots \\ &\dots \times \frac{\operatorname{sh} \frac{i\pi}{N}(N-k) \operatorname{sh} \frac{i\pi}{N}(N-k-1)}{\operatorname{sh} \frac{i\pi}{N} l \operatorname{sh} \frac{i\pi}{N}(l-1)}. \end{aligned}$$

Mit  $\operatorname{sh}(i\pi - \alpha) = \operatorname{sh}(\alpha)$  folgt daher nach Umsortieren der Zähler

$$R_{N-k-l, l}^{N-k} = 2i \sin \frac{\pi}{N}k \prod_{m=\frac{1}{2}, 1, \dots}^l \frac{\sin \frac{\pi}{N}(k+m)}{\sin \frac{\pi}{N}m} = R_{kl}^{k+l},$$

quod erat demonstrandum.  $\square$

Nach diesen Vorbereitungen ist es nun möglich, die Intertwiner festzulegen und die erwünschte Konsistenz mit dem Bootstrap-Bild zu beweisen.

### Satz 5 (Konsistenz des $Z(N)$ -Ising-Modells mit dem Bootstrap-Bild).

Das  $Z(N)$ -Ising-Modell ist konsistent mit den Gleichungen (1.18), (1.19) und (1.20) der  $S$ -Matrix-Gleichungen in Definition 1, falls für die Intertwiner die in Tabelle 3.2 angegebenen Werte gewählt werden.

*Beweis.* Hier gibt es nicht viel zu zeigen. Die Orthogonalitäts- und Vollständigkeitsrelationen (1.12) sind offensichtlich erfüllt und mit Lemma 4 sieht man sofort, daß die Beziehungen (1.18) und (1.20) für die erweiterten Intertwiner gelten. Für die Bootstrap-Gleichung (1.19) spielen die Intertwiner wegen der Diagonalität der  $S$ -Matrizen keine Rolle.  $\square$

## 3.3 Das Sinus-Gordon-Modell

### 3.3.1 Lagrange-Formulierung des Sinus-Gordon-Modells

Das Sinus-Gordon-Modell ist über die Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 + \frac{\alpha}{\beta^2}(\cos \beta\phi - 1)$$

definiert, in der ein reelles bosonisches Feld  $\phi$  auftritt. Es ist nach Coleman (siehe [29]) äquivalent zum massiven Thirring-Modell, das über die Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i \not{\partial} - M)\psi - \frac{1}{2}g(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)^2$$

gegeben ist. Der Lagrangian beinhaltet ein Spinorfeld respektive zwei fermionische Felder, das Soliton und das Antisoliton. Um die Äquivalenz zu gewährleisten, müssen die Kopplungskonstanten über die Beziehung

$$\frac{\beta^2}{8\pi - \beta^2} = \frac{\pi}{\pi + 2g} = \nu$$

miteinander verknüpft sein. Der Parameter  $\nu$  wird später im Bootstrap-Bild auftauchen. Die oben angegebene Beziehung von  $\nu$  zu  $g$  und  $\beta$  folgt dabei aus dem Vergleich einer Entwicklung der später herzuleitenden exakten Bootstrap-Ergebnisse mit einer Störungsentwicklung der  $S$ -Matrix ausgehend von der Lagrange-Formulierung.

### 3.3.2 Das Bootstrap-Programm: Die Soliton-Antisoliton- $S$ -Matrix

Als „elementare“ Teilchen des Sinus-Gordon-Modells wollen wir – die Äquivalenz mit dem massiven Thirring-Modell verwendend – das Soliton  $s$  und das Antisoliton  $\bar{s}$  ansehen. Da hier im Gegensatz zum  $Z(N)$ -Modell auch Rückwärtsstreuung auftritt (oder zumindest auftreten kann), hat man es a priori mit einer nichtdiagonalen  $S$ -Matrix zu tun. Aus Ladungserhaltungs- und Symmetriegründen folgt in der kanonischen Basis  $e_1 = |ss\rangle$ ,  $e_2 = |s\bar{s}\rangle$ ,  $e_3 = |\bar{s}s\rangle$  und  $e_4 = |\bar{s}\bar{s}\rangle$  in  $V_1 \otimes V_2$  die generelle Struktur

$$S(\theta) = \begin{pmatrix} a(\theta) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t(\theta) & r(\theta) & 0 \\ 0 & r(\theta) & t(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a(\theta) \end{pmatrix}.$$

Dabei ist zu berücksichtigen, daß die  $S$ -Matrix eine Abbildung  $S : V_1 \otimes V_2 \longrightarrow V_2 \otimes V_1$  ist und bei der entsprechenden Basis im Zielraum die Teilchen vertauscht sind. Die Amplitude für die Streuung zweier (Anti)-Solitonen ist  $a(\theta)$ , und  $t(\theta)$  bzw.  $r(\theta)$  sind die Amplituden für die Vorwärts- bzw. Rückwärtsstreuung eines der beiden Teilchen an seinem Antiteilchen. Der letztgenannte Sachverhalt spiegelt sich in den Abbildungen<sup>5</sup>

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} s \quad s \\ \diagdown \quad \diagup \\ \theta \\ \diagup \quad \diagdown \\ s \quad s \end{array} = \begin{array}{c} \bar{s} \quad \bar{s} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \theta \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bar{s} \quad \bar{s} \end{array} = a(\theta) & \begin{array}{c} \bar{s} \quad s \\ \diagdown \quad \diagup \\ \theta \\ \diagup \quad \diagdown \\ s \quad \bar{s} \end{array} = \begin{array}{c} s \quad \bar{s} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \theta \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bar{s} \quad s \end{array} = t(\theta) & \begin{array}{c} s \quad \bar{s} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \theta \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bar{s} \quad s \end{array} = \begin{array}{c} \bar{s} \quad s \\ \diagdown \quad \diagup \\ \theta \\ \diagup \quad \diagdown \\ s \quad \bar{s} \end{array} = r(\theta) \end{array}$$

wieder.

Die  $S$ -Matrix hat die Eigenwerte

$$S_{\pm}(\theta) = t(\theta) \pm r(\theta) \quad \text{und} \quad a(\theta),$$

die zu den Eigenvektoren  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|s\bar{s}\rangle \pm |\bar{s}s\rangle)$  bzw.  $|ss\rangle$  und  $|\bar{s}\bar{s}\rangle$  gehören. In Abschnitt 1.3.7 haben wir gesehen, daß den Polen der Eigenwerte gebundene Zustände entsprechen. Um

<sup>5</sup>Zur Erinnerung: Die Diagramme sind von unten nach oben zu lesen!

weitere Aussagen treffen zu können, ist es jedoch zuerst einmal notwendig, die  $S$ -Matrix konkret gegeben zu haben<sup>6</sup>. Die Crossing-Relationen (1.16) lauten

$$a(\theta) = t(i\pi - \theta) \quad \text{und} \quad r(\theta) = r(i\pi - \theta). \quad (3.3)$$

Die Unitarität (1.15) hat die Bedingungen

$$\begin{aligned} a(\theta)a(-\theta) &= 1 \\ t(-\theta)t(\theta) + r(-\theta)r(\theta) &= 1 \\ t(-\theta)r(\theta) + r(-\theta)t(\theta) &= 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

zur Folge. Aus der Yang-Baxter-Gleichung erhält man

$$r(\theta_{12})a(\theta_{13})r(\theta_{23}) + t(\theta_{12})r(\theta_{13})t(\theta_{23}) = a(\theta_{12})r(\theta_{13})a(\theta_{23}).$$

Dividiert man dies durch  $r(\theta_{12})r(\theta_{13})r(\theta_{23})$  und setzt  $h(\theta) = \frac{t(\theta)}{r(\theta)}$ , so ergibt sich für den speziellen Fall  $\theta_1 > \theta_2 > \theta_3$  unter Ausnutzung der Crossing-Relationen (3.3)

$$h(i\pi - \theta_{13}) + h(\theta_{12})h(\theta_{23}) = h(i\pi - \theta_{12})h(i\pi - \theta_{23}).$$

Mit  $\theta = \theta_{12}$  und  $\theta' = \theta_{23}$  haben wir dann wegen  $\theta + \theta' = \theta_{13}$  die Funktionalgleichung

$$h(i\pi - \theta - \theta') + h(\theta)h(\theta') = h(i\pi - \theta)h(i\pi - \theta')$$

mit der Lösung

$$h(\theta) = \frac{\text{sh } \frac{\theta}{\nu}}{\text{sh } \frac{i\pi}{\nu}} \quad (\nu > 0).$$

Um daraus die gesuchten Amplituden zu berechnen, verwenden wir den Cauchy-Integralsatz in der Form<sup>7</sup>

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\text{sh}(z - \zeta)},$$

wobei  $f(z)$  innerhalb des Weges  $\mathcal{C}$  analytisch ist. Wenden wir dies für  $\mathcal{C} = \mathbb{R} + i0 \cup \mathbb{R} + i\pi - i0$ , wobei der Weg im mathematischen Richtungssinn durchlaufen wird und im Unendlichen geschlossen ist, auf die Funktion  $f(z) = \ln t(z)$  an, so ergibt sich unter Annahme der Analytizität im betrachteten Bereich

$$\ln t(\theta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{\ln t(\zeta)d\zeta}{\text{sh}(\theta - \zeta)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\zeta}{\text{sh}(\theta - \zeta)} \ln(t(\zeta)t(i\pi + \zeta)).$$

Nun läßt sich das Produkt der Amplituden  $t$  im Integral durch  $h$  ausdrücken über

$$t(\zeta)t(i\pi + \zeta) = t(\zeta)a(-\zeta) = \frac{t(\zeta)}{a(\zeta)} = \frac{t(\zeta)}{r(\zeta)} \cdot \frac{r(i\pi - \zeta)}{u(\zeta)} = \frac{t(\zeta)}{r(\zeta)} \cdot \frac{r(i\pi - \zeta)}{t(i\pi - \zeta)} = \frac{h(\zeta)}{h(i\pi - \zeta)},$$

wobei nur die Crossing-Relationen (3.3), die Unitaritätsbeziehungen (3.4) und die Definitionsgleichung für  $h$  verwendet wurden. Setzt man die vorhin erhaltene Lösung für  $h$  ein, so ergibt sich schließlich

$$a(\theta) = t(i\pi - \theta) = \frac{1}{2\pi i} \exp \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\zeta}{\text{sh}(\theta + \zeta)} \ln \frac{\text{sh } \frac{i\pi - \zeta}{\nu}}{\text{sh } \frac{\zeta}{\nu}}.$$

Tabelle 3.3: Übersicht über alle möglichen Fusionsprozesse im Sinus-Gordon-Modell

Prozeß	Rapidity des gebundenen Zustands	Bindungswinkel
$s + \bar{s} \longrightarrow b_k$	$\gamma_s \mp \frac{i\pi}{2}(1 - \nu k) = \gamma_{\bar{s}} \pm \frac{i\pi}{2}(1 - \nu k)$	$i\pi(1 - \nu k)$
$s + b_k \longrightarrow s$	$\gamma_s \mp i\pi\nu k = \gamma_{b_k} \pm \frac{i\pi}{2}(1 - \nu k)$	$\frac{i\pi}{2}(1 + \nu k)$
$\bar{s} + b_k \longrightarrow \bar{s}$	$\gamma_{\bar{s}} \mp i\pi\nu k = \gamma_{b_k} \pm \frac{i\pi}{2}(1 - \nu k)$	$\frac{i\pi}{2}(1 + \nu k)$
$b_k + b_l \longrightarrow b_{k+l}$	$\gamma_{b_k} \mp \frac{i\pi\nu}{2}l = \gamma_{b_l} \pm \frac{i\pi\nu}{2}k$	$\frac{i\pi\nu}{2}(k + l)$
$b_{k+l} + b_k \longrightarrow b_l$	$\gamma_{b_{k+l}} \mp \frac{i\pi\nu}{2}k = \gamma_{b_k} \pm i\pi(1 - \frac{\nu}{2}(k + l))$	$i\pi(1 - \frac{\nu}{2}l)$

Von Zamolodchikov stammt die Formel (siehe [59])

$$a(\theta) = \prod_{k=0}^{\infty} \prod_{l=0}^{\infty} \frac{2l + \nu(1 + k) + \frac{\theta}{i\pi}}{2l + \nu(1 + k) - \frac{\theta}{i\pi}} \cdot \frac{2(l + 1) + k\nu + \frac{\theta}{i\pi}}{2(l + 1) + k\nu - \frac{\theta}{i\pi}} \times \\ \times \frac{2l + 1 + \nu(k + 1) - \frac{\theta}{i\pi}}{2l + 1 + \nu(k + 1) + \frac{\theta}{i\pi}} \cdot \frac{2l + 1 + k\nu - \frac{\theta}{i\pi}}{2l + 1 + k\nu + \frac{\theta}{i\pi}},$$

die die Extrapolation eines semiklassischen Ergebnisses darstellt und mit der oben angegebenen Formel übereinstimmt. Für die anderen Amplituden erhält man aus (3.3) die Gleichungen

$$t(\theta) = \frac{t(\theta) r(i\pi - \theta)}{r(\theta) t(i\pi - \theta)} a(\theta) = \frac{h(\theta)}{h(i\pi - \theta)} a(\theta) = \frac{\text{sh } \frac{\theta}{\nu}}{\text{sh } \frac{i\pi - \theta}{\nu}} a(\theta) \\ r(\theta) = \frac{r(i\pi - \theta)}{t(i\pi - \theta)} a(\theta) = \frac{a(\theta)}{h(i\pi - \theta)} = \frac{\text{sh } \frac{i\pi}{\nu}}{\text{sh } \frac{i\pi - \theta}{\nu}} a(\theta). \quad (3.5)$$

Im nachhinein stellt sich heraus, daß das Vorgehen nur erlaubt ist, falls der Parameter die Ungleichung  $\nu > 1$  erfüllt, da nur dann  $\ln t(\theta)$  im physikalischen Bereich analytisch ist. Wir können die erhaltenen Ergebnisse allerdings auf andere Werte von  $\nu$  analytisch fortsetzen, so daß wir eine Theorie auch für  $\nu < 1$  erhalten haben, die wegen der dort auftretenden gebundenen Zustände besonders interessant ist.

### 3.3.3 Weitere Teilchen: Breather

Die Eigenwerte  $S_{\pm}(\theta) = t(\theta) \pm r(\theta)$  der  $S$ -Matrix haben gemäß (3.5) einfache Pole, die gebundenen Zuständen entsprechen können, an den Stellen  $i\pi(1 - \nu k)$ , wobei  $S_+$  einen Pol für gerades  $k$  und  $S_-$  einen für ungerades  $k$  besitzt. Da sie im physikalischen Streifen  $0 < \text{Im } \theta < \pi$  liegen müssen, um physikalisch relevant zu sein, hat man die Grenze  $k < \frac{1}{\nu}$ . Die Pole gehören zu den Fusionsprozessen  $b_k = (s\bar{s})$ , wobei die sogenannten Breather  $b_k$  ungeladene Teilchen sind, d.h. es gilt  $b_k = \bar{b}_k$ . Für  $\nu > 1$  gibt es keinen Breather im Modell, für  $\frac{1}{2} < \nu < 1$  zwei, usw. Wie im  $Z(N)$ -Modell können diese Breather ihrerseits nach den zwei Regeln  $b_{k+l} = (b_k b_l)$  und  $b_l = (b_{k+l} b_k)$  fusionieren, wobei die beiden Prozesse über die Crossing-Symmetrie (1.16) der  $S$ -Matrix miteinander verbunden sind. Von diesen Polen

<sup>6</sup>Die folgende Herleitung orientiert sich an [49].

<sup>7</sup>Nach dem Residuensatz hängt der Wert des Integrals nur vom Pol ab und dort verhält sich der Integrand wie  $\frac{f(\zeta)}{z - \zeta}$ , genau wie bei der bekannten Form des Cauchy-Integralsatzes.

Tabelle 3.4: Phasenkonventionen und erweiterte Intertwiner für das Sinus-Gordon-Modell

Objekt	Wert	Objekt	Wert	Objekt	Wert	Objekt	Wert
$\phi_{s\bar{s}}^{b_k}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\phi_{b_k}^{\bar{s}s}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\eta_{s\bar{s}}^{b_k}$	$i\frac{1}{\sqrt{2}} R_{s\bar{s}}^{b_k} ^{\frac{1}{2}}$	$\eta_{b_k}^{\bar{s}s}$	$i\frac{(-1)^k}{\sqrt{2}} R_{s\bar{s}}^{b_k} ^{\frac{1}{2}}$
$\phi_{\bar{s}s}^{b_k}$	$\frac{(-1)^k}{\sqrt{2}}$	$\phi_{b_k}^{s\bar{s}}$	$\frac{(-1)^k}{\sqrt{2}}$	$\eta_{\bar{s}s}^{b_k}$	$i\frac{(-1)^k}{\sqrt{2}} R_{s\bar{s}}^{b_k} ^{\frac{1}{2}}$	$\eta_{b_k}^{s\bar{s}}$	$i\frac{1}{\sqrt{2}} R_{s\bar{s}}^{b_k} ^{\frac{1}{2}}$
$\phi_{b_k s}^s$	1	$\phi_s^s b_k$	1	$\eta_{b_k s}^s$	$i R_{b_k s}^s ^{\frac{1}{2}}$	$\eta_s^{\bar{s}s} b_k$	$i(-1)^k R_{b_k s}^s ^{\frac{1}{2}}$
$\phi_s^s b_k$	$(-1)^k$	$\phi_{b_k s}^{b_k s}$	$(-1)^k$	$\eta_s^s b_k$	$i(-1)^k R_{b_k s}^s ^{\frac{1}{2}}$	$\eta_{b_k s}^{b_k s}$	$i R_{b_k s}^s ^{\frac{1}{2}}$
$\phi_{b_k \bar{s}}^{\bar{s}}$	$(-1)^k$	$\phi_{\bar{s}}^{\bar{s}} b_k$	$(-1)^k$	$\eta_{b_k \bar{s}}^{\bar{s}}$	$i(-1)^k R_{b_k \bar{s}}^{\bar{s}} ^{\frac{1}{2}}$	$\eta_{\bar{s}}^{\bar{s}s} b_k$	$i R_{b_k \bar{s}}^{\bar{s}} ^{\frac{1}{2}}$
$\phi_{\bar{s} b_k}^{\bar{s}}$	1	$\phi_{\bar{s}}^{b_k \bar{s}}$	1	$\eta_{\bar{s} b_k}^{\bar{s}}$	$i R_{b_k \bar{s}}^{\bar{s}} ^{\frac{1}{2}}$	$\eta_{\bar{s}}^{b_k \bar{s}}$	$i(-1)^k R_{b_k \bar{s}}^{\bar{s}} ^{\frac{1}{2}}$
$\phi_{b_k b_l}^{b_{k+l}}$	1	$\phi_{b_{k+l}}^{b_l b_k}$	1	$\eta_{b_k b_l}^{b_{k+l}}$	$i R_{b_k b_l}^{b_{k+l}} ^{\frac{1}{2}}$	$\eta_{b_{k+l}}^{b_l b_k}$	$i R_{b_k b_l}^{b_{k+l}} ^{\frac{1}{2}}$
$\phi_{b_{k+l} b_k}^{b_l}$	1	$\phi_{b_l}^{b_k b_{k+l}}$	1	$\eta_{b_{k+l} b_k}^{b_l}$	$i R_{b_{k+l} b_k}^{b_l} ^{\frac{1}{2}}$	$\eta_{b_l}^{b_k b_{k+l}}$	$i R_{b_{k+l} b_k}^{b_l} ^{\frac{1}{2}}$
$\phi_{b_k b_{k+l}}^{b_l}$	1	$\phi_{b_l}^{b_{k+l} b_k}$	1	$\eta_{b_k b_{k+l}}^{b_l}$	$i R_{b_{k+l} b_k}^{b_l} ^{\frac{1}{2}}$	$\eta_{b_l}^{b_{k+l} b_k}$	$i R_{b_{k+l} b_k}^{b_l} ^{\frac{1}{2}}$

abgesehen gibt es noch eine ganze Menge an Doppelpolen, die jedoch keine Fusionsprozesse beschreiben. Die Amplitude  $a(\theta)$  hat keine einfachen Pole im physikalischen Streifen, so daß es keine gebundenen Zustände der Form  $(ss)$  oder  $\bar{s}\bar{s}$  gibt.

Die Intertwiner aus Abschnitt 1.3.7 haben gemäß der von uns gewählten Basis der diagonalisierten  $S$ -Matrix für die Soliton-Antisoliton-Fusionen die Form

$$\phi_{s\bar{s}}^{b_k} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \eta_{\bar{s}s}^{b_k} = \frac{(-1)^k}{\sqrt{2}}. \quad (3.6)$$

Genauer müßte man schreiben

$$\phi_{s\bar{s}}^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \eta_{\bar{s}s}^{\pm} = \frac{\pm 1}{\sqrt{2}},$$

wobei für ungerades  $k$  die „-“-Intertwiner und für gerades  $k$  die „+“-Intertwiner die physikalischen interessantesten sind, entsprechend dem Ursprung der gebundenen Zustände  $b_k$  aus den Polen von  $S_{\pm}(\theta)$ . Für rein mathematische Zwecke – z.B. zum Test der Relationen (1.12) – sind immer beide Anteile zu berücksichtigen. In Tabelle 3.4 ist eine Wahl der Intertwiner angegeben, die konsistent ist mit dem Bootstrap-Bild, d.h. Orthogonalitäts- und Vollständigkeitsrelation (1.12) wie auch die Beziehungen (1.13) und (1.14) sind erfüllt. Diese Behauptung läßt sich leicht anhand der Tabelle nachprüfen, wenn man die Beziehungen zwischen bestimmten Residuen verwendet, die weiter unten in Lemma 6 hergeleitet werden.

Aus Platzgründen soll hier darauf verzichtet werden, die anderen  $S$ -Matrizen analog zu dem Vorgehen beim  $Z(N)$ -Modell herzuleiten. In [28] sind alle übrigen  $S$ -Matrizen

angegeben. Sie haben die Darstellung

$$\begin{aligned}
S_{b_m b_n}(\theta) &= \frac{\tan \frac{1}{2i}(\theta + \frac{i\pi\nu}{2}(m+n))}{\tan \frac{1}{2i}(\theta - \frac{i\pi\nu}{2}(m+n))} \prod_{r=1}^{m-1} \frac{\tan \frac{1}{2i}(\theta + \frac{i\pi\nu}{2}(m+n-2r))}{\tan \frac{1}{2i}(\theta - \frac{i\pi\nu}{2}(m+n-2r))} \\
&\quad , \quad \prod_{r=1}^{n-1} \frac{\tan \frac{1}{2i}(\theta + \frac{i\pi\nu}{2}(m+n-2r))}{\tan \frac{1}{2i}(\theta - \frac{i\pi\nu}{2}(m+n-2r))} \\
S_{b_n s}(\theta) &= (-1)^n \prod_{r=1}^{n-1} \frac{\sin \frac{1}{2i}(\theta + \frac{i\pi}{2}(1+\nu(n-2r)))}{\sin \frac{1}{2i}(\theta - \frac{i\pi}{2}(1+\nu(n-2r)))} \prod_{r=0}^n \frac{\sin \frac{1}{2i}(\theta + \frac{i\pi}{2}(1+\nu(n-2r)))}{\sin \frac{1}{2i}(\theta - \frac{i\pi}{2}(1+\nu(n-2r)))} \\
&= (-1)^n \frac{\sin \frac{1}{2i}(\theta + \frac{i\pi}{2}(1+\nu n))}{\sin \frac{1}{2i}(\theta - \frac{i\pi}{2}(1+\nu n))} \frac{\sin \frac{1}{2i}(\theta + \frac{i\pi}{2}(1-\nu n))}{\sin \frac{1}{2i}(\theta - \frac{i\pi}{2}(1-\nu n))} \\
&\quad \prod_{r=1}^{n-1} \left( \frac{\sin \frac{1}{2i}(\theta + \frac{i\pi}{2}(1+\nu(n-2r)))}{\sin \frac{1}{2i}(\theta - \frac{i\pi}{2}(1+\nu(n-2r)))} \right)^2. \quad (3.7)
\end{aligned}$$

### 3.3.4 Konsistenz mit dem Bootstrap-Bild

Um die Konsistenz des Bootstrap-Bildes zu überprüfen, müssen wie schon beim  $Z(N)$ -Ising-Modell einige Residuen berechnet werden. Wir setzen

$$\begin{aligned}
\dot{R}_{b_k s}^s &= \operatorname{Res}_{\theta = \frac{i\pi}{2}(1+\nu k)} \dot{S}_{b_k s}(\theta), & \dot{R}_{\pm}^{b_k} &= \operatorname{Res}_{\theta = i\pi(1-\nu k)} \dot{S}_{\pm}(\theta), \\
\dot{R}_{b_k b_l}^{b_{k+l}} &= \operatorname{Res}_{\theta = \frac{i\pi\nu}{2}(k+l)} \dot{S}_{b_k b_l}(\theta), & \dot{R}_{b_k, b_{k+l}}^{b_l} &= \operatorname{Res}_{\theta = i\pi(1-\frac{\nu}{2}l)} \dot{S}_{k, k+l}(\theta).
\end{aligned}$$

#### Lemma 6 (Residuen der $S$ -Matrizen im Sinus-Gordon-Modell).

Die Residuen der  $S$ -Matrizen, die für Fusionsprozesse relevant sind, genügen den Beziehungen

$$\dot{R}_{k+l, l}^l = \dot{R}_{k, k+l}^l = \dot{R}_{kl}^{k+l} \quad \text{und} \quad 2\dot{R}_{b_k s}^s = \dot{R}_{\pm}^{b_k}. \quad (3.8)$$

Die Phasen der Residuen erfüllen

$$i\dot{R}_{kl}^{k+l} = -|R_{kl}^{k+l}| \quad \text{und} \quad i\dot{R}_{b_k s}^s = -(-1)^k |R_{b_k s}^s|. \quad (3.9)$$

*Beweis.* Zum Prozeß  $s = (b_k s)$  mit dem Bindungswinkel  $\theta_{b_k s}^s = \frac{i\pi}{2}(1+\nu k)$  gehört offenbar das Residuum

$$\begin{aligned}
\dot{R}_{b_k s}^s &= (-1)^k \prod_{m=1}^{k-1} \left( \frac{\sin \frac{\pi}{2}(1+\nu(k-m))}{\sin \frac{\pi}{2}\nu m} \right)^2 \frac{\sin \frac{\pi}{2}(1+\nu k)}{\frac{1}{2i}} \frac{1}{\sin \frac{\pi}{2}\nu k} \\
&= 2i(-1)^k \cot \frac{\pi}{2}\nu k \prod_{m=1}^{k-1} \cot^2 \frac{\pi}{2}\nu m.
\end{aligned}$$

Der doppelte Wert ergibt sich für  $\dot{R}_{\pm}^{b_k}$  [60].

Die gleichen Überlegungen müssen für die Fusionsprozesse  $b_{k+l} = (b_k b_l)$  und  $b_l = (b_k b_{k+l})$  durchgeführt werden. Im ersten Fall ergibt sich mit  $\overline{M} = \max(k, l)$  und  $\underline{M} = \min(k, l)$  wegen  $\overline{M} + \underline{M} = l + k$  aus (3.7) schnell

$$\begin{aligned} \dot{R}_{b_k b_l}^{b_{k+l}} &= \frac{\tan \frac{\pi\nu}{2}(k+l)}{\frac{1}{2i}} \prod_{m=1}^{\overline{M}-1} \frac{\tan \frac{\pi\nu}{2}(k+l-m)}{\tan \frac{\pi\nu}{2}m} \prod_{m=\underline{M}}^{\overline{M}-1} \frac{\tan \frac{\pi\nu}{2}(k+l-m)}{\tan \frac{\pi\nu}{2}m} \\ &= 2i \frac{\tan \frac{\pi\nu}{2}(l+k) \tan^2 \frac{\pi\nu}{2}(l+k-1) \cdots \tan^2 \frac{\pi\nu}{2}(\overline{M}+1) \tan \frac{\pi\nu}{2}\overline{M} \cdots \tan \frac{\pi\nu}{2}(\underline{M}+1)}{\tan \frac{\pi\nu}{2}(\overline{M}-1) \cdots \tan \frac{\pi\nu}{2}\underline{M} \tan^2 \frac{\pi\nu}{2}(\underline{M}-1) \cdots \tan^2 \frac{\pi\nu}{2}}. \end{aligned}$$

Kürzen einiger Terme ergibt

$$\dot{R}_{b_k b_l}^{b_{k+l}} = 2i \frac{\tan \frac{\pi\nu}{2}(l+k) \tan^2 \frac{\pi\nu}{2}(l+k-1) \cdots \tan^2 \frac{\pi\nu}{2}(\overline{M}+1) \tan \frac{\pi\nu}{2}\overline{M}}{\tan \frac{\pi\nu}{2}\underline{M} \tan^2 \frac{\pi\nu}{2}(\underline{M}-1) \cdots \tan^2 \frac{\pi\nu}{2}}. \quad (3.10)$$

Im zweiten Fall ist der Pol bei  $\theta = i\pi(1 - \frac{\nu}{2})$  in der Darstellung (3.7) in dem Produkt für den Index  $m = k$  verborgen. Es folgt

$$\begin{aligned} \dot{R}_{b_k, b_{k+l}}^{b_l} &= \frac{\tan \frac{\pi}{2}(1+\nu k)}{\tan \frac{\pi}{2}(1-\nu(k+l))} \prod_{m=1}^{k-1} \left( \frac{\tan \frac{\pi}{2}(1+\nu(k-r))}{\tan \frac{\pi}{2}(1-\nu(k+l-r))} \right)^2 \times \\ &\quad \times \frac{\frac{2}{i}}{\tan \frac{\pi}{2}(1-\nu l)} \prod_{m=k+1}^{k+l-1} \frac{\tan \frac{\pi}{2}(1+\nu(k-r))}{\tan \frac{\pi}{2}(1-\nu(k+l-r))}. \end{aligned}$$

Durch Ausschreiben kann leicht gesehen werden, daß das letzte Produkt gerade 1 ergibt. Unter Verwendung von  $\tan(\frac{\pi}{2} \pm \alpha) = \mp \cot \alpha = \mp \frac{1}{\tan \alpha}$  hat man daher nach Sortierung der Terme

$$\dot{R}_{b_k, b_{k+l}}^{b_l} = 2i \frac{\tan \frac{\pi\nu}{2}(k+l) \tan^2 \frac{\pi\nu}{2}(k+l-1) \cdots \tan^2 \frac{\pi\nu}{2}(l+1) \tan \frac{\pi\nu}{2}l}{\tan \frac{\pi\nu}{2}k \tan^2 \frac{\pi\nu}{2}(k-1) \cdots \tan^2 \frac{\pi\nu}{2}}.$$

Ist  $k \leq l$  kommt man mit  $\overline{M} = l$ ,  $\underline{M} = k$  direkt zu Gleichung (3.10). Andernfalls kürzen sich einige Terme, woraufhin man mit  $\overline{M} = k$ ,  $\underline{M} = l$  ebenfalls zu (3.10) gelangt.  $\square$

Im eben genannten Lemma wurde implizit ein Fusionsprozeß  $b_l = (b_{k+l} b_k)$  postuliert, der sich später als für die Lokalität des Sinus-Gordon-Modells notwendig herausstellen wird, jedoch in der Literatur bisher noch nicht diskutiert worden ist. Die Konsistenz dieses Prozesses mit dem Bootstrap-Bild wird in Anhang C bewiesen.

Den Abschluß dieses Kapitels bildet der

### Satz 7 (Konsistenz des Bootstrap-Bildes für das Sinus-Gordon-Modell).

Das Sinus-Gordon-Modell ist für die oben definierten  $S$ -Matrizen und die Intertwiner aus Tabelle 3.4 konsistent mit dem Bootstrap-Bild, d.h. die Gleichungen (1.12), (1.13) und (1.14) sind erfüllt.

*Beweis.* Für Prozesse an denen ausschließlich Breather beteiligt sind, ist die Aussage wie beim  $Z(N)$ -ising-Modell fast trivial. Interessanter wird es, wenn Solitonen oder Antisolitonen beteiligt sind. Nach Tabelle 3.4 gilt aber auch hier

$$\begin{aligned} \phi_e^{s\bar{s}} \phi_{s\bar{s}}^e &= \phi_+^{s\bar{s}} \phi_{s\bar{s}}^+ + \phi_-^{s\bar{s}} \phi_{s\bar{s}}^- = 1 & \phi_e^{s\bar{s}} \phi_{s\bar{s}}^e &= \phi_+^{s\bar{s}} \phi_{s\bar{s}}^+ + \phi_-^{s\bar{s}} \phi_{s\bar{s}}^- = 0 \\ \phi_e^{s\bar{s}} \phi_{s\bar{s}}^e &= \phi_+^{s\bar{s}} \phi_{s\bar{s}}^+ + \phi_-^{s\bar{s}} \phi_{s\bar{s}}^- = 1 & \phi_e^{s\bar{s}} \phi_{s\bar{s}}^e &= \phi_+^{s\bar{s}} \phi_{s\bar{s}}^+ + \phi_-^{s\bar{s}} \phi_{s\bar{s}}^- = 0. \end{aligned}$$

Alle anderen Vollständigkeitsrelationen (1.12) kann man sofort aus der Tabelle ablesen. Nimmt man die Ergebnisse von Lemma 6 zu Hilfe, kann schnell gezeigt werden, daß mit  $\pm = (-1)^k$  folgt

$$\begin{aligned} i\text{Res}_{b_k} \dot{S}_{s\bar{s}}^{s\bar{s}}(\theta) &= \phi_{\pm}^{s\bar{s}} i\text{Res}_{b_k} \dot{S}_{\pm} \phi_{s\bar{s}}^{\pm} = \eta_{b_k}^{s\bar{s}} \eta_{s\bar{s}}^{b_k} & i\text{Res}_{b_k} \dot{S}_{s\bar{s}}^{s\bar{s}}(\theta) &= \phi_{\pm}^{s\bar{s}} i\text{Res}_{b_k} \dot{S}_{\pm} \phi_{s\bar{s}}^{\pm} = \eta_{b_k}^{s\bar{s}} \eta_{s\bar{s}}^{b_k} \\ i\text{Res}_{b_k} \dot{S}_{s\bar{s}}^{s\bar{s}}(\theta) &= \phi_{\pm}^{s\bar{s}} i\text{Res}_{b_k} \dot{S}_{\pm} \phi_{s\bar{s}}^{\pm} = \eta_{b_k}^{s\bar{s}} \eta_{s\bar{s}}^{b_k} & i\text{Res}_{b_k} \dot{S}_{s\bar{s}}^{s\bar{s}}(\theta) &= \phi_{\pm}^{s\bar{s}} i\text{Res}_{b_k} \dot{S}_{\pm} \phi_{s\bar{s}}^{\pm} = \eta_{b_k}^{s\bar{s}} \eta_{s\bar{s}}^{b_k}. \end{aligned}$$

Für Prozesse an denen sowohl Breather wie auch Solitonen oder Antisolitonen beteiligt sind, erfüllen die erweiterten Intertwiner ebenfalls Gleichung (1.13). Auf das explizite Hinschreiben wollen wir an dieser Stelle verzichten. Die Relationen (1.14) lassen sich ebenfalls leicht an Tabelle 3.4 ablesen, wenn man Lemma 6 berücksichtigt.  $\square$



# Kapitel 4

## Formfaktoren und Lokalität

### 4.1 Einleitende Bemerkungen zur Thematik

F. A. Smirnov hat in seinem Buch [16] für bosonische Felder gezeigt, daß man ausgehend von den  $S$ -Matrix- und Formfaktoraxiomen in den Definitionen 1 bzw. 2 die Lokalität der Felder zurückerhält, sofern keine gebundenen Zustände vorliegen. Dies wird dadurch ausgedrückt, daß beliebige Matrixelemente des Kommutators  $[\mathcal{O}_1(x), \mathcal{O}_2(y)]$  für raumar-tigen Abstand  $x - y$  verschwinden. An einigen Stellen verwendet Smirnov jedoch Formeln, die gewisse Vorzeichen enthalten, die nicht richtig sein können. In Kapitel 2 sind bereits die Rekursionsbeziehungen (2.13) hergeleitet worden, mit deren Hilfe in diesem Kapitel eine korrigierte allgemeine Crossing-Formel bewiesen wird, die zudem mit der ebenfalls in Kapitel 2 über die Zamolodchikov-Algebra gewonnenen Gleichung (2.32) übereinstimmt. Bei meinen Untersuchungen stellte sich heraus, daß mit diesen neuen Formeln der Beweis von Smirnov ohne sonstige Änderungen weiter verwendet werden kann. Wo die Fehler im Buch von Smirnov genau liegen und wie sie in seiner Nomenklatur zu beheben sind, ist Gegenstand des Anhangs D.1.

Im ersten Teil dieses Kapitels wird eine korrigierte Version des Beweises von Smirnov vorgestellt. Dies erfolgt in einer Nomenklatur, die natürlicher und damit verständlicher ist als die ursprüngliche. Dabei werden auch graphische Methoden verwendet, die eine übersichtliche Deutung der Gleichungen erlauben und einem ein Gefühl für die einzelnen Schritte vermitteln, in denen zum Teil mit außerordentlich unübersichtlichen kombinatorischen Ausdrücken gearbeitet wird. Der zweite Teil dieses Kapitels enthält das Hauptergebnis der vorliegenden Arbeit. Es wird gezeigt, daß sich der oben genannte Beweis auf Modelle erweitern läßt, in denen gebundene Zustände auftreten. Aus meinen Untersuchungen zu dieser Thematik resultierten die in bezug auf Phasenkonventionen und eine mögliche graphische Interpretation optimierten  $S$ -Matrix- und Formfaktorgleichungen (1.19) bzw. (2.20), die gebundene Zustände beschreiben. Außerdem wurde im Sinus-Gordon-Modell ein in der Literatur bislang noch nicht diskutierter Fusionsprozeß entdeckt (vgl. Kapitel 3).

### 4.2 Einführung einer kompakten Nomenklatur

In den kommenden Abschnitten treten komplizierte kombinatorische Ausdrücke auf, die sich nur dann einigermaßen handhaben lassen, wenn man sie in (geordneten) Mengen

zusammenfaßt.

Seien  $n$  Teilchen durch  $(\alpha_1, \epsilon_1), \dots, (\alpha_n, \epsilon_n)$  charakterisiert. Dabei steht  $\alpha$  wie bisher für die Rapiditäten und  $\epsilon$  für die inneren Freiheitsgrade. Wir fassen diese Quantenzahlen zu einer Menge zusammen, deren Bezeichnung möglichst dem Namen der Rapiditäten entlehnt sein soll. In diesem Fall haben wir also

$$A = \{(\alpha_1, \epsilon_1), \dots, (\alpha_n, \epsilon_n)\}.$$

Wichtig ist, daß diese Menge als geordnet angesehen werden soll. Diese Ordnung hat jedoch a priori nichts mit der Größe der Rapiditäten zu tun!

Im nächsten Schritt definieren wir Mengen, die nach aufsteigenden bzw. absteigenden Rapiditäten geordnet sind. Sei  $A = \{(\alpha_1, \epsilon_1), \dots, (\alpha_n, \epsilon_n)\}$  wie oben und  $\pi \in S(n)$  eine Permutation mit  $\alpha_{\pi(1)} \leq \alpha_{\pi(2)} \leq \dots \leq \alpha_{\pi(n)}$ . Dann setzen wir

$$\begin{aligned} \overleftarrow{A} &= \{(\alpha_{\pi(n)}, \epsilon_{\pi(n)}), \dots, (\alpha_{\pi(2)}, \epsilon_{\pi(2)}), (\alpha_{\pi(1)}, \epsilon_{\pi(1)})\} \\ \overrightarrow{A} &= \{(\alpha_{\pi(1)}, \epsilon_{\pi(1)}), (\alpha_{\pi(2)}, \epsilon_{\pi(2)}), \dots, (\alpha_{\pi(n)}, \epsilon_{\pi(n)})\}. \end{aligned}$$

Die Vorstellung dabei ist, daß  $\overrightarrow{A}$  aus  $\overleftarrow{A}$  durch eine Art „Konjugationsprozeß“ entsteht, bei dem die Reihenfolge bekanntlich auch vertauscht wird. Diese Nomenklatur wurde von Smirnov eingeführt und erweist sich als hilfreich, um die komplizierten kombinatorischen Ausdrücke, die später auftreten werden, einfacher handhaben zu können.

Die Vereinigung zweier Mengen  $A = \{(\alpha_1, \epsilon_1), \dots, (\alpha_n, \epsilon_n)\}$  und  $B = \{(\beta_1, \mu_1), \dots, (\beta_m, \mu_m)\}$  schreiben wir als

$$A \cup B = \{(\alpha_1, \epsilon_1), \dots, (\alpha_n, \epsilon_n), (\beta_1, \mu_1), \dots, (\beta_m, \mu_m)\}.$$

Das „ $\cup$ “-Zeichen steht nicht für die normale mengentheoretische Vereinigung, sondern berücksichtigt, daß wir mit geordneten Mengen arbeiten. Im allgemeinen gilt daher  $A \cup B \neq B \cup A$  und auch die Ausdrücke  $\overleftarrow{A \cup B}$  und  $\overleftarrow{A} \cup \overleftarrow{B}$  müssen strikt unterschieden werden.

Zu einer Menge  $A = \{(\alpha_1, \epsilon_1), \dots, (\alpha_n, \epsilon_n)\}$  von Quantenzahlen definieren wir den (rapiditätsgeordneten) Zustand

$$|A\rangle = |(\alpha_1, \epsilon_1), \dots, (\alpha_n, \epsilon_n)\rangle$$

und den dualen Zustand

$$\langle A^T| = \langle (\alpha_n, \epsilon_n), \dots, (\alpha_1, \epsilon_1)|.$$

Dabei ist  $A^T = \{(\alpha_n, \epsilon_n), \dots, (\alpha_1, \epsilon_1)\}$ . Mit dieser Nomenklatur gilt  $\overleftarrow{A^T} = \overrightarrow{A}$  und umgekehrt. Offenbar ist  $|\overleftarrow{A}\rangle$  ein in-Zustand und  $|\overrightarrow{A}\rangle$  ein out-Zustand. Die graphische Notation

$$|A\rangle = \left| A = \begin{array}{c} \alpha_1 \\ \epsilon_1 \end{array} \left| \begin{array}{c} \alpha_2 \\ \epsilon_2 \end{array} \right| \dots \left| \begin{array}{c} \alpha_n \\ \epsilon_n \end{array} \right. \right.$$

$$\langle A^T| = \left. \left| A = \begin{array}{c} \epsilon_1 \\ \alpha_1 \end{array} \right| \begin{array}{c} \epsilon_2 \\ \alpha_2 \end{array} \right| \dots \left| \begin{array}{c} \epsilon_n \\ \alpha_n \end{array} \right.$$

wird in Zukunft nützlich sein. Der Gesamtimpuls des Zustandes  $|A\rangle$  ist der Vektor

$$P(A) = \sum_{(\alpha, \epsilon) \in A} m_\epsilon \begin{pmatrix} \text{ch}(\alpha) \\ \text{sh}(\alpha) \end{pmatrix}.$$

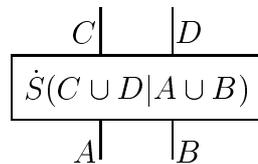
Er hat offensichtlich die Eigenschaften

$$P(A \cup B) = P(A) + P(C) \quad \text{und} \quad P(\overleftarrow{A}) = P(\overrightarrow{A}) = P(A).$$

Nach diesen Vorarbeiten können wir zu den Definitionen von  $S$ -Matrizen und Formfaktoren kommen. Die Mengen  $A \cup B$  und  $C \cup D$  mögen (in beliebiger Ordnung) die gleichen Rapiditäten enthalten. Der Ausdruck

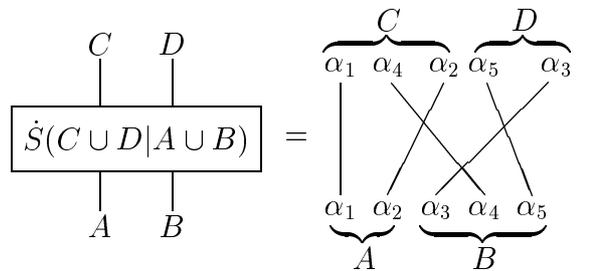
$$\dot{S}(C \cup D | A \cup B)$$

soll das Produkt von Zweiteilchen- $S$ -Matrizen darstellen, das den Zustand  $|A \cup B\rangle$  in  $|C \cup D\rangle$  überführt. Dabei können Teilchenumwandlungen stattfinden. Wegen der Yang-Baxter-Gleichung ist die konkrete Darstellung nicht eindeutig. Hier interessiert jedoch auch viel weniger die konkrete Form als vielmehr die graphische Interpretation, die durch

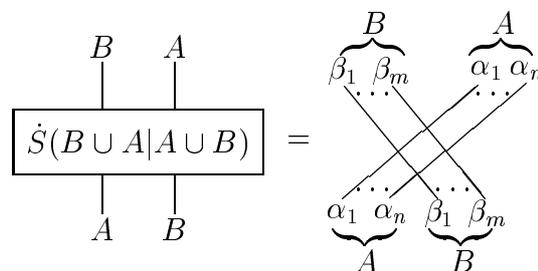


gegeben ist. Es mag am Anfang etwas verwirrend sein, daß eine ganze Menge von Rapiditäten mit einer einzigen Linie dargestellt wird. Dies ist jedoch zweckmäßig, da man es später mit sehr vielen dieser Linien zu tun haben wird und die Diagramme so einigermaßen übersichtlich bleiben.

Um diese Definition zu veranschaulichen, betrachten wir das Beispiel  $A = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ ,  $B = \{\alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\}$ ,  $C = \{\alpha_1, \alpha_4, \alpha_2\}$  und  $D = \{\alpha_5, \alpha_3\}$ . In diesem konkreten Fall erhalten wir die Darstellung



Ein weiteres Beispiel ist in der Abbildung



zu sehen.

Die oben angeführte Konvention wird in natürlicher Weise erweitert, um für Mengen  $A_1 \cup \dots \cup A_n$  und  $B_1 \cup \dots \cup B_m$ , die die gleichen Rapiditäten enthalten, den Operator

$$\dot{S}(B_1 \cup \dots \cup B_m | A_1 \cup \dots \cup A_n)$$





*Beweis.* Das sind einfach die Beziehungen (2.13) in der neuen Notation, wobei für das rechte Gleichheitszeichen die Watsongleichung (2.17) verwendet wurde.  $\square$

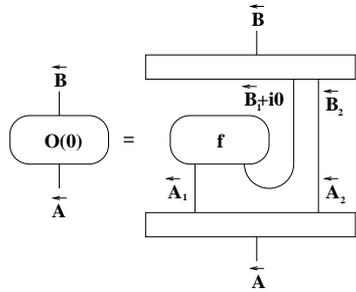
Eine erste Verbindung von *physikalischen* Matrixelementen und Formfaktoren wird hergestellt durch den

**Satz 9 („Rechts“-Crossing).**

Seien  $A$  und  $B$  beliebige Mengen von Rapiditäten (und den dazugehörigen inneren Quantenzahlen). Dann gilt

$$\begin{aligned} \langle \vec{B} | \mathcal{O}(0) | \overleftarrow{A} \rangle &= f(\overleftarrow{B} | \overleftarrow{A}) \\ &= \sum_{\substack{A=A_1 \cup A_2 \\ B=B_1 \cup B_2}} \dot{S}(\overleftarrow{B}_1 \cup \overleftarrow{B}_2 | \overleftarrow{B}_1 \cup \overleftarrow{B}_2) f(\overleftarrow{A}_1 \cup \overleftarrow{B}_1 - i\pi + i0) \mathbf{C}(\overleftarrow{B}_1 - i\pi) \Delta(\overleftarrow{B}_2 | \overleftarrow{A}_2) \dot{S}(\overleftarrow{A}_1 \cup \overleftarrow{A}_2 | \overleftarrow{A}_1 \cup \overleftarrow{A}_2). \end{aligned}$$

Die dazugehörige graphische Interpretation ist

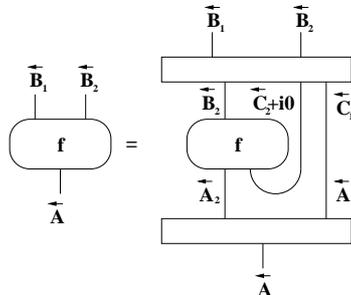


Man vergleiche diese Formel mit dem Ergebnis aus Abschnitt 2.4.5.

*Beweis.* Mit Hilfe von Lemma 8 werden wir statt der eigentlichen Behauptung für festes  $B = B_1 \cup B_2$  per Induktion nach  $|B_1|$  die Relation

$$\begin{aligned} f(\overleftarrow{B}_1 \cup \overleftarrow{B}_2 | \overleftarrow{A}) &= \sum_{\substack{A=A_1 \cup A_2 \\ B_1=C_1 \cup C_2}} \dot{S}(\overleftarrow{B}_1 \cup \overleftarrow{B}_2 | \overleftarrow{B}_2 \cup \overleftarrow{C}_2 \cup \overleftarrow{C}_1) \times \\ &\quad \times f(\overleftarrow{B}_2 | \overleftarrow{A}_2 \cup \overleftarrow{C}_2 - i\pi + i0) \mathbf{C}(\overleftarrow{C}_2 - i\pi) \Delta(\overleftarrow{C}_1 | \overleftarrow{A}_1) \dot{S}(\overleftarrow{A}_2 \cup \overleftarrow{A}_1 | \overleftarrow{A}) \end{aligned}$$

mit der anschaulichen Interpretation

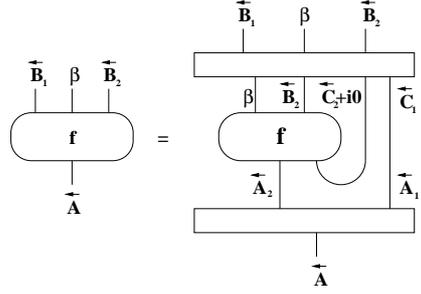


beweisen, aus der dann die Behauptung folgt, wenn  $B_2 = \emptyset$  bzw.  $|B_1| = |B|$  gesetzt wird. Im Falle  $|B_1| = 1$  besagt die Formel nichts anderes als die in Lemma 8 angegebene. Damit haben wir den Induktionsanfang. Das Ziel ist, ein Teilchen aus der Menge  $B_1$  herauszulösen und der Menge  $B_2$  zuzuführen, wobei sich diese Aussage auf die Bedeutung

der beiden Mengen in der angegebenen Formel bezieht. Nach Induktionsvoraussetzung gilt

$$f(\overleftarrow{B}_1 \cup \beta \cup \overleftarrow{B}_2 | \overleftarrow{A}) = \sum_{\substack{A=A_1 \cup A_2 \\ B_1=C_1 \cup C_2}} \dot{S}(\overleftarrow{B}_1 \cup \beta \cup \overleftarrow{B}_2 | \beta \cup \overleftarrow{B}_2 \cup \overleftarrow{C}_2 \cup \overleftarrow{C}_1) \times \\ \times f(\beta \cup \overleftarrow{B}_2 | \overleftarrow{A}_2 \cup \overleftarrow{C}_2 - i\pi + i0) \mathbf{C}(\overleftarrow{C}_2 - i\pi) \Delta(\overleftarrow{C}_1 | \overleftarrow{A}_1) \dot{S}(\overleftarrow{A}_2 \cup \overleftarrow{A}_1 | \overleftarrow{A})$$

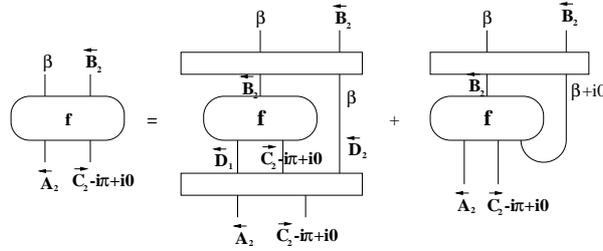
bzw. graphisch



Nach Anwendung von (4.1) in der Form<sup>1</sup>

$$f(\beta \cup \overleftarrow{B}_2 | \overleftarrow{A}_2 \cup \overleftarrow{C}_2 - i\pi + i0) = \dot{S}(\beta \cup \overleftarrow{B}_2 | \overleftarrow{B}_2 \cup \beta) f(\overleftarrow{B}_2 | \overleftarrow{A}_2 \cup \overleftarrow{C}_2 - i\pi + i0 \cup \beta - i\pi + i0) \\ + \sum_{A_2=D_1 \cup D_2} \dot{S}(\beta \cup \overleftarrow{B}_2 | \overleftarrow{B}_2 \cup \beta) f(\overleftarrow{B}_2 | \overleftarrow{D}_1 \cup \overleftarrow{C}_2 - i\pi + i0) \Delta(\beta | \overleftarrow{D}_2) \dot{S}(\overleftarrow{D}_1 \cup \overleftarrow{C}_2 - i\pi \cup \overleftarrow{D}_2 | \overleftarrow{A}_2 \cup \overleftarrow{C}_2 - i\pi)$$

oder graphisch

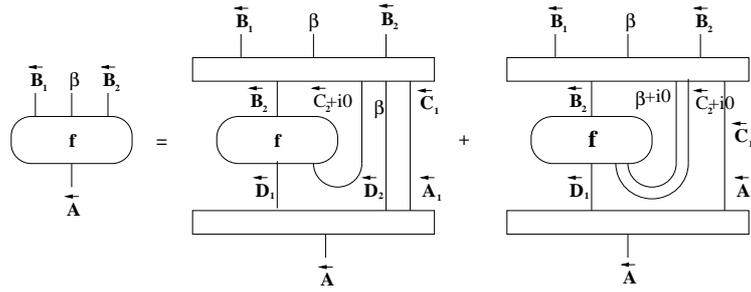


erhält man wegen Unitarität (1.15) und Yang-Baxter-Gleichung (1.17)

$$f(\overleftarrow{B}_1 \cup \beta \cup \overleftarrow{B}_2 | \overleftarrow{A}) = \sum_{\substack{A=D_1 \cup D_2 \cup A_1 \\ B_1=C_1 \cup C_2}} \dot{S}(\overleftarrow{B}_1 \cup \beta \cup \overleftarrow{B}_2 | \overleftarrow{B}_2 \cup \overleftarrow{C}_2 \cup \beta \cup \overleftarrow{C}_1) \times \\ \times f(\overleftarrow{B}_2 | \overleftarrow{D}_1 \cup \overleftarrow{C}_2 - i\pi + i0) \mathbf{C}(\overleftarrow{C}_2 - i\pi) \Delta(\beta \cup \overleftarrow{C}_1 | \overleftarrow{D}_2 \cup \overleftarrow{A}_1) \dot{S}(\overleftarrow{D}_1 \cup \overleftarrow{D}_2 \cup \overleftarrow{A}_1 | \overleftarrow{A}) + \\ + \sum_{\substack{A=D_1 \cup \emptyset \cup A_1 \\ B_1=C_1 \cup C_2}} \dot{S}(\overleftarrow{B}_1 \cup \beta \cup \overleftarrow{B}_2 | \overleftarrow{B}_2 \cup \overleftarrow{C}_2 \cup \beta \cup \overleftarrow{C}_1) \times \\ \times f(\overleftarrow{B}_2 | \overleftarrow{D}_1 \cup \overleftarrow{C}_2 - i\pi + i0 \cup \beta - i\pi + i0) \mathbf{C}(\overleftarrow{C}_2 - i\pi \cup \beta - i\pi) \Delta(\overleftarrow{C}_1 | \overleftarrow{A}_1) \dot{S}(\overleftarrow{D}_1 \cup \overleftarrow{A}_1 | \overleftarrow{A})$$

<sup>1</sup>Man beachte, daß  $\beta$  und  $C_2$  zusammen keine singulären Beiträge bilden können.

mit der Darstellung



Die Ausdrücke lassen sich leicht zusammenfassen und ergeben die Behauptung. □

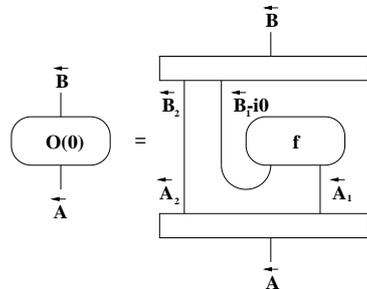
Das nächste Lemma beinhaltet eine analoge zweite Darstellung von physikalischen Matrixelementen durch Formfaktoren.

**Satz 10 („Links“-Crossing).**

Seien  $A$  und  $B$  beliebige Mengen von Rapiditäten (und den dazugehörigen inneren Quantenzahlen). Dann ist die in Satz 9 angegebene Darstellung äquivalent zu

$$\langle \vec{B} | \mathcal{O}(0) | \vec{A} \rangle = \sum_{\substack{A=A_1 \cup A_2 \\ B=B_1 \cup B_2}} \dot{S}(\vec{B}_1 \cup \vec{B}_2 | \vec{B}_2 \cup \vec{B}_1) \Delta(\vec{B}_2 | \vec{A}_2) \mathcal{C}(\vec{B}_1) f(\vec{B}_1 + i\pi - i0 \cup \vec{A}_1) \dot{S}(\vec{A}_2 \cup \vec{A}_1 | \vec{A}_1 \cup \vec{A}_2).$$

Graphisch bedeutet dies



*Beweis.* Der Beweis von „Links“-Crossing ist völlig analog zu dem von „Rechts“-Crossing (Lemma 9), wobei wieder Lemma 8 verwendet werden muß. □

Das folgende Lemma ist der zentrale Teil im Beweis des Kommutativitätstheorems für Modelle ohne gebundene Zustände. Für Matrixelemente von Produkten von Operatoren werden zwei qualitativ verschiedene Darstellungen hergeleitet, die eine derart aufeinander abgestimmte Polstruktur aufweisen, daß der eigentliche Beweis der Lokalität nachher eigentlich trivial wird.

**Lemma 11 (Feldproduktarstellungen).**

Das Matrixelement eines Produkts von Operatoren läßt sich folgendermaßen ausdrücken:

$$\begin{aligned}
\langle \vec{B} | \mathcal{O}_1(x) \mathcal{O}_2(y) | \overleftarrow{A} \rangle &= \sum_{\substack{A=A_1 \cup A_2 \cup A_3 \\ B=B_1 \cup B_2 \cup B_3}} \sum_{|C|=0}^{\infty} \int dC \dot{S}(\overleftarrow{B_1 \cup B_2 \cup B_3} | \overleftarrow{B_1 \cup B_3 \cup B_2}) \\
&\quad f_1(\overleftarrow{A_2 \cup \overleftarrow{C} \cup \overleftarrow{B_1}} - i\pi + i0) \mathbf{C}(\overleftarrow{B_1} - i\pi) \Delta(\overleftarrow{B_3} | \overleftarrow{A_3}) \dot{S}(\overleftarrow{C \cup \overleftarrow{A_3}} | \overleftarrow{A_3 \cup \overleftarrow{C}}) \\
&\quad \mathbf{C}(\overleftarrow{C \cup \overleftarrow{B_2}}) f_2(\overleftarrow{B_2} + i\pi - i0 \cup \overleftarrow{C} + i\pi - i0 \cup \overleftarrow{A_1}) \\
&\quad \dot{S}(\overleftarrow{A_2 \cup \overleftarrow{A_3} \cup \overleftarrow{A_1}} | \overleftarrow{A_1 \cup A_2 \cup A_3}) e^{+iP(B_1)x - iP(A_2)x - iP(C)(x-y) + iP(B_2)y - iP(A_1)y} \\
\langle \vec{B} | \mathcal{O}_2(y) \mathcal{O}_1(x) | \overleftarrow{A} \rangle &= \sum_{\substack{A=A_1 \cup A_2 \cup A_3 \\ B=B_1 \cup B_2 \cup B_3}} \sum_{|C|=0}^{\infty} \int dC \dot{S}(\overleftarrow{B_1 \cup B_2 \cup B_3} | \overleftarrow{B_1 \cup B_3 \cup B_2}) \\
&\quad \mathbf{C}(\overleftarrow{B_2}) f_2(\overleftarrow{B_2} + i\pi - i0 \cup \overleftarrow{C} \cup \overleftarrow{A_1}) \Delta(\overleftarrow{B_3} | \overleftarrow{A_3}) \dot{S}(\overleftarrow{A_3 \cup \overleftarrow{C}} | \overleftarrow{C \cup \overleftarrow{A_3}}) \\
&\quad f_1(\overleftarrow{A_2 \cup \overleftarrow{C}} - i\pi + i0 \cup \overleftarrow{B_1} - i\pi + i0) \mathbf{C}(\overleftarrow{C} - i\pi \cup \overleftarrow{B_1} - i\pi) \\
&\quad \dot{S}(\overleftarrow{A_2 \cup \overleftarrow{A_3} \cup \overleftarrow{A_1}} | \overleftarrow{A_1 \cup A_2 \cup A_3}) e^{+iP(B_1)x - iP(A_2)x + iP(C)(x-y) + iP(B_2)y - iP(A_1)y}.
\end{aligned}$$

Die Diagramme zu den Formeln sind in den Beweisen angegeben. Man beachte, daß die beiden Darstellungen nicht durch die Ersetzungen  $x \leftrightarrow y$ ,  $f_1 \leftrightarrow f_2$  auseinander hervorgehen, also qualitativ verschieden sind. Die Unterschiede liegen zum einen in der unterschiedlichen Stellung der beiden  $f$  und deren jeweiligen Argumenten und zum anderen in dem Vorzeichen der Impulse  $P(C)$  und in der  $S$ -Matrix zwischen den beiden Formfaktoren. Weiter hängen beide rechten Seiten nur von  $x - y$  ab, wenn man die Gleichungen mit  $e^{iP(A)x - iP(B)y}$  multipliziert.

*Beweis.* Der Beweis orientiert sich an der graphischen Darstellung, die auf der nächsten Seite zu finden ist, und nimmt in den verwendeten Begriffen auf sie Bezug.

1. Der erste Schritt besteht darin, ein vollständiges Orthonormalsystem von in-Zuständen einzuschieben und die Formel  $\mathcal{O}(x) = e^{i\hat{p}x} \mathcal{O}(0) e^{-i\hat{p}x}$  für die Translation eines Operators zu verwenden:

$$\begin{aligned}
T := \langle \vec{B} | \mathcal{O}_1(x) \mathcal{O}_2(y) | \overleftarrow{A} \rangle &= \sum_{|D|=0}^{\infty} \int dD \langle \vec{B} | \mathcal{O}_1(x) | \overleftarrow{D} \rangle \langle \overleftarrow{D} | \mathcal{O}_2(y) | \overleftarrow{A} \rangle = \sum_{|D|=0}^{\infty} \int dD \\
&\quad \sum_{|F|=0}^{\infty} \int dF \langle \vec{B} | \mathcal{O}_1(0) | \overleftarrow{F} \rangle \Delta(\overleftarrow{F} | \overleftarrow{D}) \langle \overleftarrow{D} | \mathcal{O}_2(0) | \overleftarrow{A} \rangle e^{+iP(B)x - iP(F)x + iP(D)y - iP(A)y}.
\end{aligned}$$

Die Sätze 9 und 10 erlauben offensichtlich mehrere Möglichkeiten fortzufahren.

Hier soll Satz 9 verwendet werden, um  $\langle \vec{B} | \mathcal{O}_1(0) | \overleftarrow{F} \rangle$  mit Hilfe von Formfaktoren auszudrücken, und Satz 10 entsprechend für  $\langle \overleftarrow{D} | \mathcal{O}_2(0) | \overleftarrow{A} \rangle$ . Damit folgt

$$\begin{aligned}
T &= \sum_{|D|, |F|=0}^{\infty} \int dD dF \sum_{\substack{A=A_1 \cup A_4 \\ B=B_1 \cup B_4 \\ D=D_1 \cup D_4 \\ F=F_1 \cup F_4}} \dot{S}(\overleftarrow{B_1 \cup B_4} | \overleftarrow{B_1 \cup B_4}) f_1(\overleftarrow{F_1 \cup \overleftarrow{B_1}} - i\pi + i0) \mathbf{C}(\overleftarrow{B_1} - i\pi) \\
&\quad \Delta(\overleftarrow{B_4} | \overleftarrow{F_4}) \dot{S}(\overleftarrow{F_1 \cup \overleftarrow{F_4}} | \overleftarrow{F_1 \cup F_4}) \Delta(\overleftarrow{F_1 \cup F_4} | \overleftarrow{D_1 \cup D_4}) \dot{S}(\overleftarrow{D_1 \cup D_4} | \overleftarrow{D_4 \cup \overleftarrow{D_1}}) \Delta(\overleftarrow{D_4} | \overleftarrow{A_4}) \\
&\quad \mathbf{C}(\overleftarrow{D_1}) f_2(\overleftarrow{D_1} + i\pi - i0 \cup \overleftarrow{A_1}) \dot{S}(\overleftarrow{A_4 \cup \overleftarrow{A_1}} | \overleftarrow{A_4 \cup A_1}) e^{+iP(B_1)x - iP(F_1)x + iP(D_1)y - iP(A_1)y}.
\end{aligned}$$

Durch die „Mittalebene“  $\Delta(\overleftarrow{F_1} \cup \overleftarrow{F_4} | \overleftarrow{D_1} \cup \overleftarrow{D_4})$  laufen vier Bestandteile

- (a) Von  $A$  bis  $B$  durchgehende Linien sollen mit  $A_3 = B_3$  bezeichnet werden.
- (b) Linien von  $A$  nach  $f_1$  heißen im folgenden  $A_2$ .
- (c) Linien von  $f_2$  nach  $B$  nennen wir  $B_2$ .
- (d) Linien von  $f_2$  nach  $f_1$  werden  $C$  genannt.

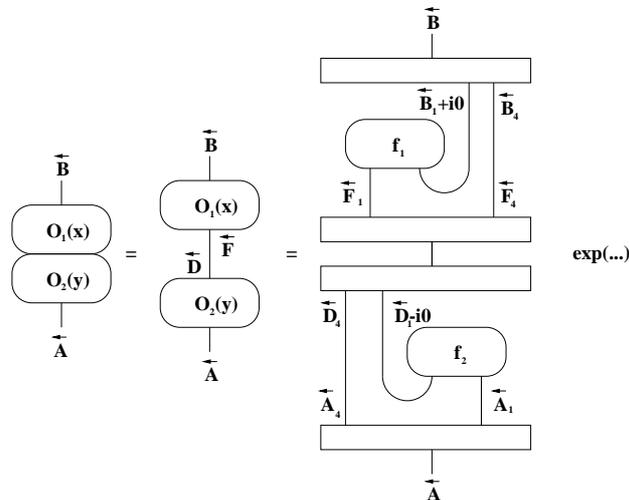
Damit gilt offenbar  $A_4 = D_4 = A_2 \cup A_3$ ,  $B_4 = F_4 = B_2 \cup B_3$ ,  $D_1 = C \cup B_2$  und  $F_1 = C \cup A_2$ . Wir erhalten daher

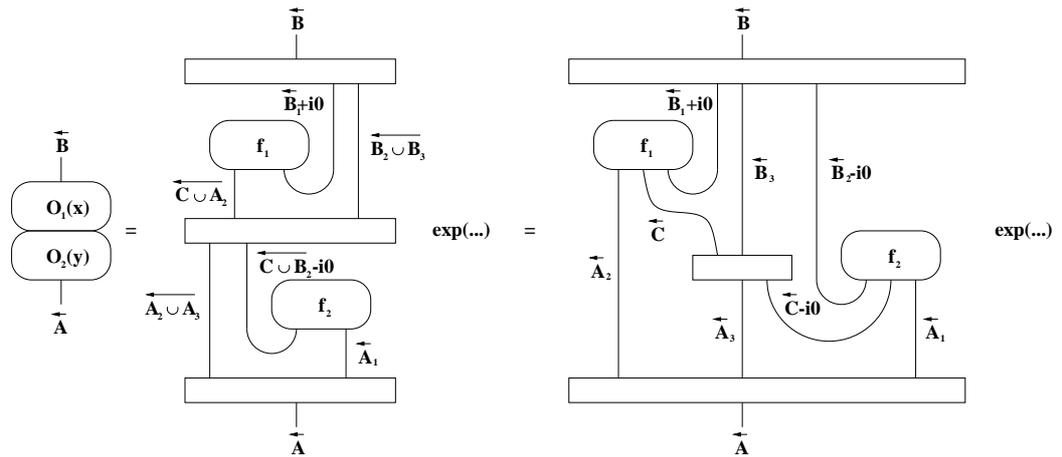
$$T = \sum_{\substack{A=A_1 \cup A_2 \cup A_3 \\ B=B_1 \cup B_2 \cup B_3}} \sum_{|C|=0}^{\infty} \int dC \dot{S}(\overleftarrow{B_1} \cup \overleftarrow{B_2} \cup \overleftarrow{B_3} | \overleftarrow{B_1} \cup \overleftarrow{B_2} \cup \overleftarrow{B_3}) \\ f_1(\overleftarrow{C} \cup \overleftarrow{A_2} \cup \overleftarrow{B_1} - i\pi + i0) \mathbf{C}(\overleftarrow{B_1} - i\pi) \dot{S}(\overleftarrow{C} \cup \overleftarrow{A_2} \cup \overleftarrow{B_2} \cup \overleftarrow{B_3} | \overleftarrow{C} \cup \overleftarrow{A_2} \cup \overleftarrow{B_2} \cup \overleftarrow{B_3}) \\ \Delta(B_3 | A_3) \dot{S}(\overleftarrow{C} \cup \overleftarrow{A_2} \cup \overleftarrow{B_2} \cup \overleftarrow{B_3} | \overleftarrow{A_2} \cup \overleftarrow{A_3} \cup \overleftarrow{C} \cup \overleftarrow{B_2}) \mathbf{C}(\overleftarrow{C} \cup \overleftarrow{B_2}) f_2(\overleftarrow{C} \cup \overleftarrow{B_2} + i\pi - i0 \cup \overleftarrow{A_1}) \\ \dot{S}(\overleftarrow{A_2} \cup \overleftarrow{A_3} \cup \overleftarrow{A_1} | \overleftarrow{A_1} \cup \overleftarrow{A_2} \cup \overleftarrow{A_3}) e^{+iP(B_1)x - iP(C \cup A_2)x + iP(C \cup B_2)y - iP(A_1)y}.$$

Wendet man Formfaktoraxiom (2.17) an, um  $\overleftarrow{C} \cup \overleftarrow{A_2}$  in  $\overleftarrow{A_2} \cup \overleftarrow{C}$  zu trennen und  $\overleftarrow{C} \cup \overleftarrow{B_2}$  in  $\overleftarrow{C} \cup \overleftarrow{B_2}$ , und faßt dann alle  $S$ -Matrizen soweit wie möglich zusammen, so ergibt sich

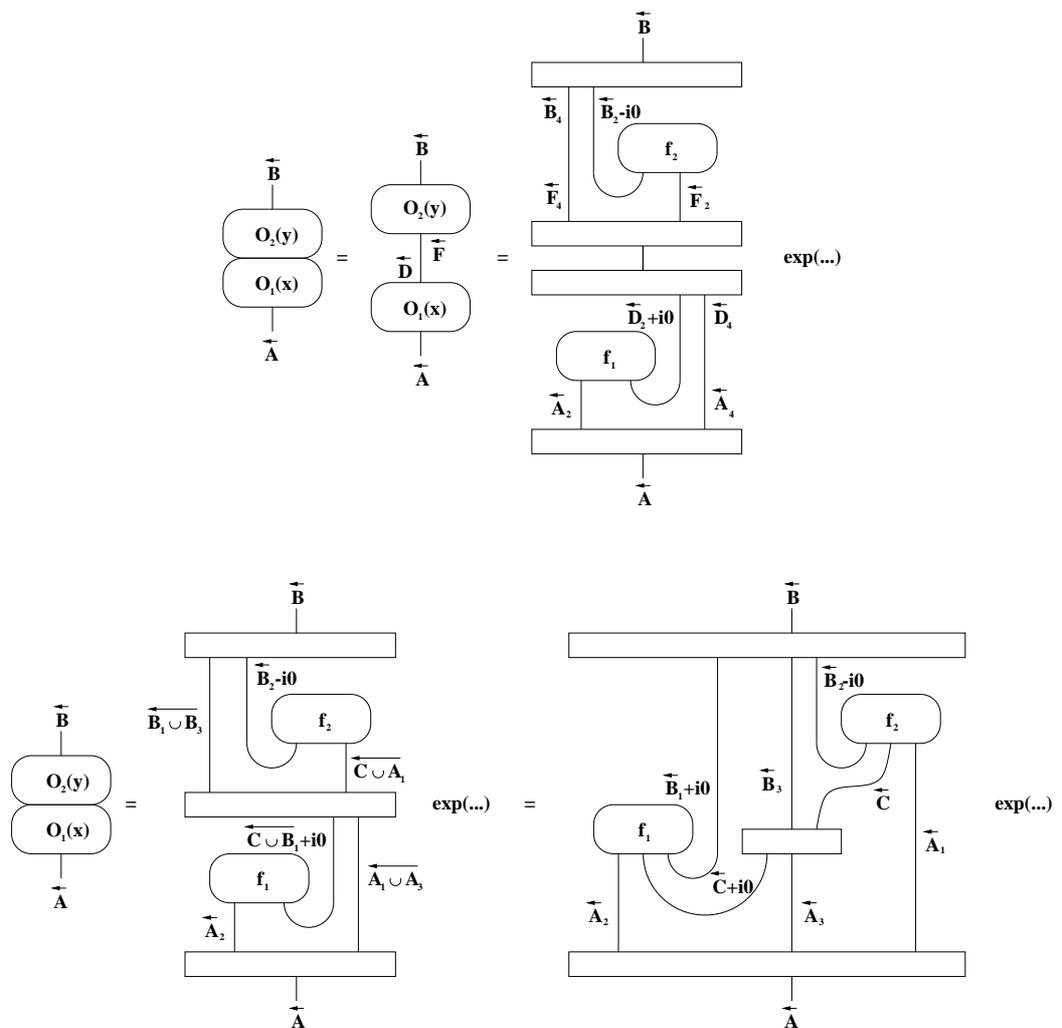
$$T = \sum_{\substack{A=A_1 \cup A_2 \cup A_3 \\ B=B_1 \cup B_2 \cup B_3}} \sum_{|C|=0}^{\infty} \int dC \dot{S}(\overleftarrow{B_1} \cup \overleftarrow{B_2} \cup \overleftarrow{B_3} | \overleftarrow{B_1} \cup \overleftarrow{B_3} \cup \overleftarrow{B_2}) \\ f_1(\overleftarrow{A_2} \cup \overleftarrow{C} \cup \overleftarrow{B_1} - i\pi + i0) \mathbf{C}(\overleftarrow{B_1} - i\pi) \Delta(B_3 | A_3) \dot{S}(\overleftarrow{C} \cup \overleftarrow{A_3} | \overleftarrow{A_3} \cup \overleftarrow{C}) \\ \mathbf{C}(\overleftarrow{C} \cup \overleftarrow{B_2}) f_2(\overleftarrow{B_2} + i\pi - i0 \cup \overleftarrow{C} + i\pi - i0 \cup \overleftarrow{A_1}) \\ \dot{S}(\overleftarrow{A_2} \cup \overleftarrow{A_3} \cup \overleftarrow{A_1} | \overleftarrow{A_1} \cup \overleftarrow{A_2} \cup \overleftarrow{A_3}) e^{+iP(B_1)x - P(A_2)x - iP(C)(x-y) + iP(B_2)y - P(A_1)y}.$$

In der folgenden Graphik ist der Beweis noch einmal zusammengefaßt:





2. Der zweite Teil des Beweises verläuft analog, nur daß diesmal Satz 9 verwendet wird, um  $\langle \overrightarrow{D} | \mathcal{O}_1(0) | \overrightarrow{A} \rangle$  mit Hilfe von Formfaktoren auszudrücken, und Satz 10 für  $\langle \overrightarrow{B} | \mathcal{O}_2(0) | \overrightarrow{F} \rangle$ . Auf die Formeln soll hier deswegen verzichtet werden. Graphisch verläuft der Beweis wie folgt:



□

## 4.4 Das Kommutativitätstheorem für Modelle ohne gebundene Zustände

Nach den Vorbereitungen des letzten Abschnitts werden wir uns nun dem ersten Hauptergebnis zuwenden, das dann in späteren Abschnitten auf Modelle mit gebundenen Zuständen erweitert werden wird.

**Theorem 12 (Kommutativitätstheorem).** *Seien  $\mathcal{O}_1(x)$  und  $\mathcal{O}_2(y)$  lokale bosonische Felder, deren Formfaktoren die Formfaktoriome aus Satz 2 erfüllen. Das betrachtete Modell weise ferner keine gebundenen Zustände auf. Dann verhalten sich die Felder kausal, d.h. für  $x - y$  raumartig gilt (im schwachen Sinn, d.h. für alle Matrixelemente)*

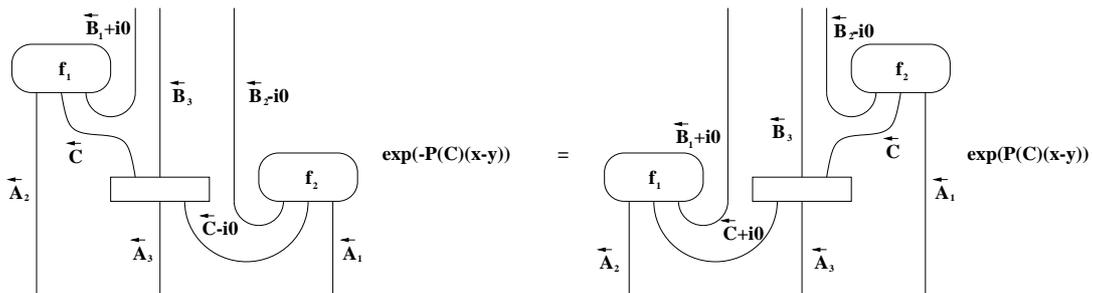
$$[\mathcal{O}_1(x), \mathcal{O}_2(y)] = 0 \quad (4.2)$$

*Beweis.* Ohne Beschränkung der Allgemeinheit soll  $y = 0$  und desweiteren  $x^0 = 0$  angenommen werden. Dies ist (nur) möglich, da  $x$  und  $y$  raumartigen Abstand haben. Es ist dann noch notwendig, zwischen positiven und negativen Werten von  $x^1$  zu unterscheiden.

Zuerst soll jedoch das generelle Vorgehen verdeutlicht werden. Wir werden nicht (4.2) zeigen, sondern nur, daß beliebige Matrixelemente der linken Seite verschwinden. Dazu gehen wir von den in Lemma 11 angegebenen Formeln aus und schreiben

$$\begin{aligned} \langle \vec{B} | [\mathcal{O}_1(x) \mathcal{O}_2(y)] | \vec{A} \rangle &= \sum_{\substack{A=A_1 \cup A_2 \cup A_3 \\ B=B_1 \cup B_2 \cup B_3}} \sum_{|C|=0}^{\infty} \int dC \dot{S}(\overline{B_1 \cup B_2 \cup B_3} | \overline{B_1 \cup B_3 \cup B_2}) \Delta(\overline{B_3} | \overline{A_3}) \\ &\quad \left[ f_1(\overline{A_2 \cup \vec{C} \cup \vec{B}_1} - i\pi + i0) \mathbf{C}(\overline{B_1} - i\pi) \dot{S}(\overline{\vec{C} \cup \overline{A_3} | \overline{A_3} \cup \vec{C}}) \right. \\ &\quad \mathbf{C}(\overline{\vec{C} \cup \vec{B}_2}) f_2(\overline{\vec{C} + i\pi - i0 \cup \vec{B}_2} + i\pi - i0 \cup \overline{A_1}) e^{-iP(C)(x-y)} \\ &\quad - \mathbf{C}(\overline{B_2}) f_2(\overline{B_2} + i\pi - i0 \cup \overline{\vec{C} \cup \overline{A_1}}) \dot{S}(\overline{A_3 \cup \vec{C} | \vec{C} \cup \overline{A_3}}) \\ &\quad \left. f_1(\overline{A_2 \cup \vec{C} - i\pi + i0 \cup \vec{B}_1} - i\pi + i0) \mathbf{C}(\overline{\vec{C} - i\pi \cup \vec{B}_1}) e^{+iP(C)(x-y)} \right] \\ &\quad \dot{S}(\overline{A_2 \cup \overline{A_3} \cup \overline{A_1} | \overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}}) e^{+iP(B_1)x - iP(A_2)x + iP(B_2)y - iP(A_1)y}. \end{aligned}$$

In der nachfolgenden Graphik ist die Gleichung dargestellt, die zu überprüfen ist:



Ausgeschrieben bedeutet dies

$$\begin{aligned}
 & \int dC f_1(\overleftarrow{A}_2 \cup \overleftarrow{C} \cup \overrightarrow{B}_1 - i\pi + i0) \mathbf{C}(\overrightarrow{B}_1 - i\pi) \dot{S}(\overleftarrow{C} \cup \overleftarrow{A}_3 | \overleftarrow{A}_3 \cup \overleftarrow{C}) \\
 & \quad \mathbf{C}(\overrightarrow{B}_2 \cup \overleftarrow{C}) f_2(\overrightarrow{B}_2 + i\pi \cup \overrightarrow{C} + i\pi \cup \overleftarrow{A}_1 + i0) e^{-iP(C)(x-y)} \\
 & = \int dC \mathbf{C}(\overrightarrow{B}_2) f_2(\overrightarrow{B}_2 + i\pi - i0 \cup \overleftarrow{C} \cup \overleftarrow{A}_1) \dot{S}(\overleftarrow{A}_3 \cup \overleftarrow{C} | \overleftarrow{C} \cup \overleftarrow{A}_3) \\
 & \quad f_1(\overleftarrow{A}_2 - i0 \cup \overrightarrow{C} - i\pi \cup \overrightarrow{B}_1 - i\pi) \mathbf{C}(\overrightarrow{C} - i\pi \cup \overrightarrow{B}_1 - i\pi) e^{+iP(C)(x-y)}. \quad (4.3)
 \end{aligned}$$

Wegen  $P(C \pm i\pi) = -P(C)$  und der Argumente der Formfaktoren liegt die Vermutung nahe, daß versucht werden sollte, für den ersten Summanden den Integrationsweg entsprechend  $C \rightarrow C - i\pi$  zu verschieben. Das eröffnet dann auch Möglichkeiten, die Axiome über die analytischen Fortsetzungen von  $S$ -Matrizen und Formfaktoren – die Crossing-Relationen – anzuwenden.

Wir wollen annehmen, daß sich die Formfaktorfunktionen und  $S$ -Matrizen für große Werte im zu betrachtenden Bereich von  $C$  genügend gutartig verhalten, so daß das Konvergenzverhalten der Integrale ausschließlich von den Faktoren  $e^{\pm iP(C)(x-y)}$  abhängt.

1.  $x^1 < 0$ :

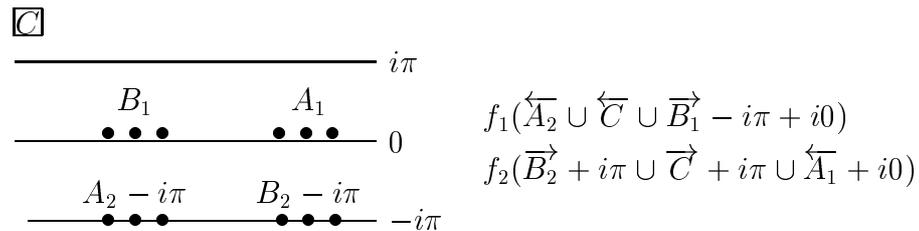
Mit dieser speziellen Wahl von  $x^1$  gilt

$$-P(C)(x-y) = - \sum_{(\gamma, \epsilon) \in C} m_\epsilon \text{sh}(\gamma) x^1.$$

Soll  $C$  gemäß  $C \rightarrow C - i\pi$  ins Komplexe fortgesetzt werden, ist darauf zu achten, daß das Integral konvergent bleibt, d.h. das Argument der Exponentialfunktion sollte für den gesamten Bereich  $\text{Im } C \in (-\pi, 0)$  einen negativen Realteil haben. Im Anhang D.2 (Lemma 38) wird explizit gezeigt, daß dies unter den genannten Voraussetzungen der Fall ist.

Die nächste Frage ist die nach der Polstruktur des Ausgangs- bzw. Zielausdrucks, um die Residuen zu finden, die berücksichtigt werden müssen. Bei der Anwendung des Residuensatzes wird ferner davon ausgegangen, daß die beiden vertikalen Stücke, die benötigt werden, um den Integrationsweg zu schließen, keinen Beitrag liefern. Dies ist gerechtfertigt, wenn der Exponentialfaktor im Impulsbeitrag schneller verschwindet als die Formfaktoren und die  $S$ -Matrizen anwachsen.

Für den Fall, daß das Modell keine gebundenen Zustände hat<sup>2</sup>, ist die Polstruktur der linken Seite von (4.3) schematisch<sup>3</sup> in der Abbildung



<sup>2</sup>Insbesondere hat also die  $S$ -Matrix keine Pole.

<sup>3</sup>Natürlich sind die Realteile nicht in der dargestellten Weise geordnet.



2.  $x^1 > 0$ :

Da die Bedingung genauso gut  $x^1 > y^1$  oder auch  $x^1 = 0, y^1 < 0$  heißen könnte und da  $[\mathcal{O}_2(y), \mathcal{O}_1(x)] = -[\mathcal{O}_1(x), \mathcal{O}_2(y)]$ , ist dieser Fall kein qualitativ neuer, sondern schon im anderen enthalten.

□

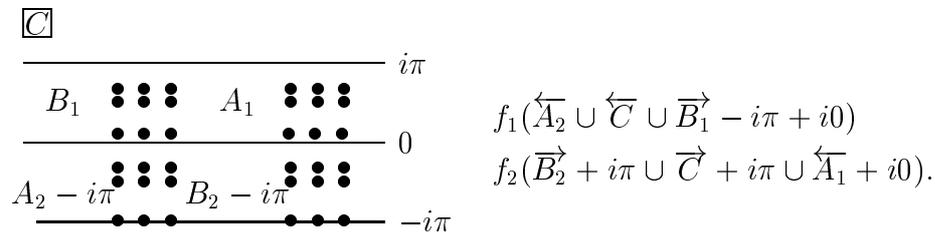
Der Beweis wird komplizierter, wenn gebundene Zustände berücksichtigt werden müssen. Diese Problematik ist daher dem nächsten Abschnitt vorbehalten. Es ist auch möglich, einen dem oben angegebenen analogen Beweis mit Hilfe des Ansatzes von Laskevish und der Zamolodchikov-Algebra zu führen. Für diagonale  $S$ -Matrizen ohne Pole wurde dies durchgeführt in [39]. Es ist dort allerdings nicht möglich, graphische Methoden zu verwenden und zum anderen kommt man um die explizite Berücksichtigung der Residuen bei der Verschiebung des Integrationswegs nicht herum, die hier elegant umgangen worden ist. Außerdem ist meines Wissens nach noch nicht bekannt, ob die Zamolodchikov-Algebra für *alle* Arten von  $S$ -Matrizen, also insbesondere auch nichtdiagonale, eine konsistente Darstellung in einem physikalischen Raum besitzt.

## 4.5 Gebundene Zustände und Lokalität

### 4.5.1 Darstellung der Überlegungen am einfachen Beispiel

Das Ziel des Restes dieses Kapitels ist, den Beweis der Lokalität auf Modelle zu erweitern, die gebundene Zustände aufweisen. Die einzige Annahme, die wir verwenden wollen, ist die Gültigkeit des Bootstrap-Bildes. Wir werden sehen, daß dies bereits ausreicht, um die Lokalität des Modells zu gewährleisten. Insbesondere sind dann das  $Z(N)$ -Ising- und das Sinus-Gordon-Modell lokal.

In diesem Abschnitt sollen an einfachen Beispielen die Prinzipien vorgestellt werden, mit denen die Pole, die zu gebundenen Zuständen gehören, behandelt werden können. Die Verallgemeinerung dieser Überlegungen ist dann relativ trivial. Zur Erinnerung ist im folgenden Diagramm die Polstruktur der Formfaktoren aus der ersten Formel aus Lemma 11 gemäß (2.19) und (2.20) dargestellt, falls das Modell gebundene Zustände enthält.

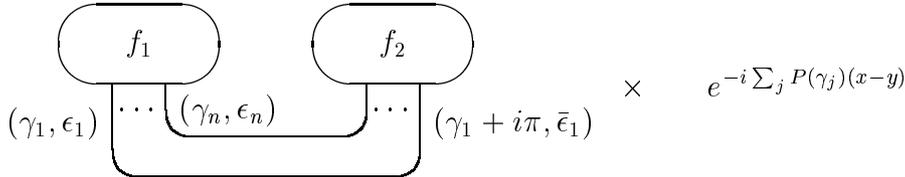


Wären die neu auftretenden Pole, die zu gebundenen Zuständen gehören, nicht vorhanden, würde man nach dem Resultat des letzten Abschnitts bei der Verschiebung des Integrationsweges genau den Ausdruck bekommen, den man haben wollte. Beim Überstreichen dieser Pole, die auch in den  $S$ -Matrizen auftreten, werden Residuen aufgesammelt, die insgesamt verschwinden müssen, wenn die Lokalität gegenüber dem Modell ohne gebundene Zustände weiterhin bestehen soll. Es soll dabei angenommen werden, daß alle einfachen Pole zu gebundenen Zuständen gehören.

Hat man es mit einem Vakuum-Vakuum-Matrixelement zu tun, so ist dieses gleich

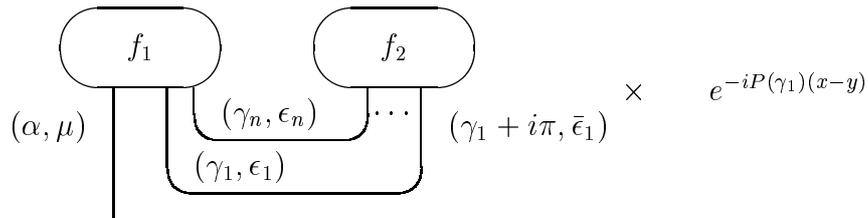
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{\epsilon_1, \dots, \epsilon_n} \int \frac{d\gamma_1}{4\pi} \cdots \frac{d\gamma_n}{4\pi} [f_1(\gamma_1, \dots, \gamma_n)]_{\epsilon_1 \dots \epsilon_n} [f_2(\gamma_n + i\pi, \dots, \gamma_1 + i\pi)]_{\bar{\epsilon}_n \dots \bar{\epsilon}_1} e^{-i \sum_j P(\gamma_j)(x-y)}.$$

In graphischer Schreibweise bedeutet dies



Verschiebt man die  $\gamma$ 's simultan um  $-i\pi$ , wird kein Pol überstrichen, da die Differenz der einzelnen  $\gamma$ 's immer kleiner als alle möglichen Bindungswinkel bleibt. Simultan heißt dabei, erst  $\gamma_1$  um einen endlichen Betrag, dessen Imaginärteil kleiner ist als der des kleinsten im Modell auftretenden Bindungswinkels, in der  $\mathbb{C}$ -Ebene nach unten zu verschieben, wobei nach Wahl der Verschiebung noch kein Pol überstrichen wird, und dies anschließend auch hintereinander für  $\gamma_2, \dots$  zu tun. Am Ende dieses Verschiebungsschrittes haben alle  $\gamma$ 's untereinander den gleichen Wert, so daß wieder ohne Gefahr alle nacheinander um einen endlichen Betrag verschoben werden können. Nach einer endlichen Zahl dieser Schritte sind alle  $\gamma$ 's um  $-i\pi$  verschoben wurden, ohne das Residuum eines Pols berücksichtigen zu müssen. Anschaulich kann man sich natürlich auch eine unendliche Folge von infinitesimalen Verschiebungsschritten der oben genannten Art vorstellen, was die Bezeichnung simultane Verschiebung sicher besser trifft.

Betrachte nun den Spezialfall eines einzelnen äußeren Teilchens im Ket-Zustand. Nach Lemma 11 hat das Matrixelement dann zwei Gruppen von topologisch verschiedenen Graphen in der Summe: Eine Gruppe, bei der das äußere Teilchen in den Formfaktor  $f_1$  einläuft, und eine, bei der es dies bei  $f_2$  tut. Betrachte für festes  $n$  einen Graphen



vom ersten Typ bzw. in Formeln

$$\frac{1}{n!} \sum_{\epsilon_1 \dots \epsilon_n} \int \frac{d\gamma_1}{4\pi} \cdots \frac{d\gamma_n}{4\pi} [f_1(\alpha, \gamma_1, \dots, \gamma_n)]_{\mu \epsilon_1 \dots \epsilon_n} [f_2(\gamma_n + i\pi, \dots, \gamma_1 + i\pi)]_{\bar{\epsilon}_n \dots \bar{\epsilon}_1} e^{-i \sum_j P(\gamma_j)(x-y)}.$$

Da die Rapidität  $\alpha$  fest vorgegeben ist, wird man nun bei der Verschiebung der Integrationswege der  $\gamma$ 's Pole überstreichen, die zu gebundenen Zuständen gehören. Die verschiedenen auftretenden Bindungswinkel seien mit  $\theta_j$  bezeichnet, wobei  $|\theta_1| < |\theta_2| < \dots$  erfüllt sei. Für das oben betrachtete feste  $\mu$  sei weiter<sup>4</sup>  $\mathcal{B}_j^L = \{(\mu\sigma \rightarrow$

<sup>4</sup>Das  $L$  steht für links, da  $\mu$  in diesen Fusionsprozessen links steht und wir später auch noch solche betrachten werden, bei denen  $\mu$  rechts steht.

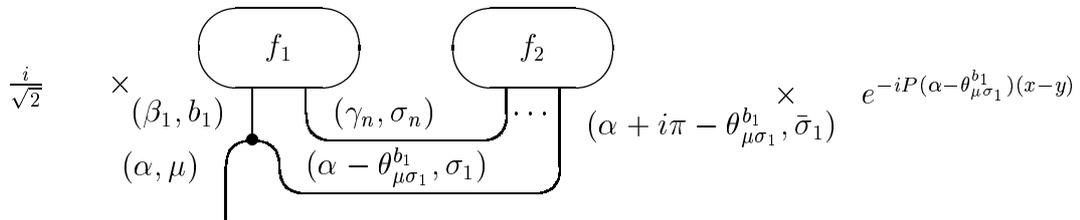
$b)|\theta_j$  Bindungswinkel für die Fusion  $b = (\mu\sigma)$ . In einfachen Modellen werden diese Mengen nur aus einem Element bestehen, dies soll jedoch nicht vorausgesetzt werden.

Das Vorgehen ist das gleiche wie zuvor. Die  $\gamma$ 's werden simultan verschoben, bis man an die Nähe des ersten Poles  $\alpha - \gamma_1 = \theta_1$  gelangt. Beim Überstreichen des Poles mit  $\gamma_1$  erhält man einen Residuenbeitrag und ein unverändertes Integral, bei dem der  $\gamma_1$ -Integrationsweg jetzt unterhalb des Poles verläuft. Im letzteren vertauschen wir mit Hilfe der Regel (2.17) die Rapiditäten  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  simultan und ziehen dann analog zu eben auch  $\gamma_2$  über den Pol. Setzt man dies für die anderen Rapiditäten fort, so erhält man ein Integral, bei dem der Integrationsweg sämtlicher  $\gamma$ 's unterhalb des betrachteten Poles liegt, und  $n$  untereinander gleiche Residuenbeiträge von den verschiedenen  $\gamma$ 's.

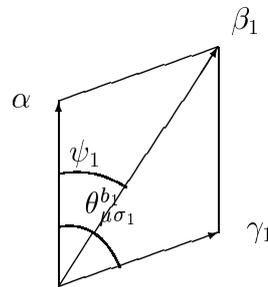
Das kann nacheinander für alle Pole wiederholt werden. Insgesamt entsteht das gewünschte Matrixelement, bei dem die Operatoren vertauscht sind (so als ob keine gebundenen Zustände vorhanden wären) und nach (2.20) der Residuen-Beitrag

$$\frac{i}{\sqrt{2}} \sum_j \sum_{(\mu\sigma_1 \rightarrow b_1) \in B_j^L} \frac{1}{(n-1)!} \sum_{\epsilon_2 \dots \epsilon_n} \int \frac{d\gamma_2}{4\pi} \dots \frac{d\gamma_n}{4\pi} [f_1(\beta_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)]_{b_1 \epsilon_2 \dots \epsilon_n} \eta_{\mu\sigma_1}^{b_1} [f_2(\gamma_n, \dots, \gamma_2, \alpha + i\pi - \theta_{\mu\sigma_1}^{b_1})]_{\bar{\epsilon}_n \dots \bar{\epsilon}_2 \bar{\sigma}_1} e^{-i(P(\alpha - \theta_{b_1}) + \sum_{j>1} P(\gamma_j))(x-y)}, \quad (4.4)$$

wobei  $\beta_1 = \alpha - \psi_1$  über die Impulserhaltung bestimmt ist (vgl. das Impulsdigramm auf der folgenden Seite). Das Vorzeichen ergibt sich folgendermaßen: Da der Pol von oben nach unten überstrichen wird, gibt es den Faktor  $-1$ , der dadurch kompensiert wird, daß das  $\gamma_1$ , bezüglich dem das Residuum zu nehmen ist, im Gegensatz zu (2.20) rechts von seinem Partner steht. Die einzelnen Bestandteile dieser Formel sind schematisch in der Abbildung



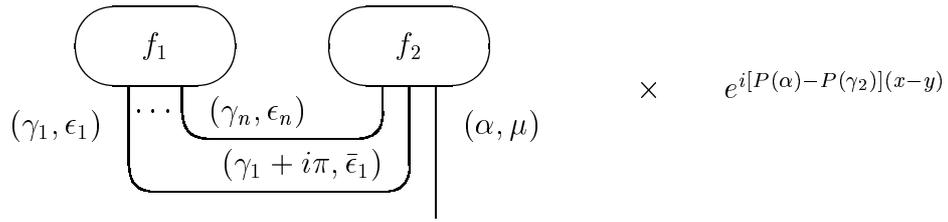
dargestellt. Im Diagramm



ist der Fusionsprozeß noch einmal im (euklidischen) Impulsraum zu sehen (vgl. Abschnitt 1.3.7).

Der nächste Schritt besteht darin, wenn möglich einen weiteren Graphen zu finden, der einen Beitrag liefert, der den eben betrachteten gerade kompensiert. Offensichtlich bleiben uns nur Graphen vom Typ 2, bei dem das äußere Teilchen rechts einläuft. Der

Ausgangspunkt ist dann



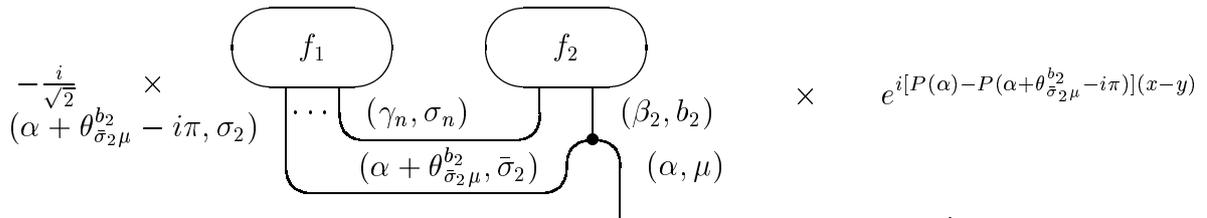
bzw. in Formeln ausgedrückt

$$\frac{1}{n!} \sum_{\epsilon_1 \dots \epsilon_n} \int \frac{d\gamma_1}{4\pi} \dots \frac{d\gamma_n}{4\pi} [f_1(\gamma_1, \dots, \gamma_n)]_{\epsilon_1 \dots \epsilon_n} [f_2(\gamma_n + i\pi, \dots, \gamma_1 + i\pi, \alpha)]_{\bar{\epsilon}_n \dots \bar{\epsilon}_1 \mu} e^{i(P(\alpha) - \sum_j P(\gamma_j))(x-y)}.$$

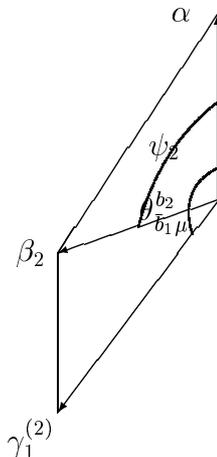
Analog zu eben setze  $\mathcal{B}_j^R = \{(\sigma\mu \rightarrow b) | \theta_j \text{ Bindungswinkel für die Fusion } b = (\sigma\mu)\}$ . Die Pole liegen hier jedoch nicht bei den  $\alpha - \gamma = \theta_j$  wie im oben betrachteten Fall, sondern bei  $\gamma + i\pi - \alpha = \theta_j$ . Das gleiche Vorgehen wie vorhin liefert neben dem erwünschten Anteil die Residuen-Beiträge

$$-\frac{i}{\sqrt{2}} \sum_j \sum_{(\bar{\sigma}_2 \mu \rightarrow b_2) \in \mathcal{B}_2^R} \frac{1}{(n-1)!} \sum_{\epsilon_2 \dots \epsilon_n} \int \frac{d\gamma_2}{4\pi} \dots \frac{d\gamma_n}{4\pi} [f_1(\alpha + \theta_{b_2} - i\pi, \gamma_2, \dots, \gamma_n)]_{\epsilon_2 \dots \epsilon_n} \eta_{\bar{\sigma}_2 \mu}^{b_2} [f_2(\gamma_n, \dots, \gamma_2, \beta_2)]_{\bar{\epsilon}_n \dots \bar{\epsilon}_2 b_2} e^{i(P(\alpha) - P(\alpha + \theta_{\bar{\sigma}_2 \mu}^{b_2} - i\pi) - \sum_{j>1} P(\gamma_j))(x-y)}, \quad (4.5)$$

wobei der Faktor  $-1$  diesmal erhalten bleibt, da die  $\gamma$ 's links von ihrem Fusionspartner stehen. Schematisch entsprechen diese Beiträge dem Diagramm



Es gelte  $\beta_2 = \alpha + \psi_2$ . Dann haben wir im Impulsraum das Bild

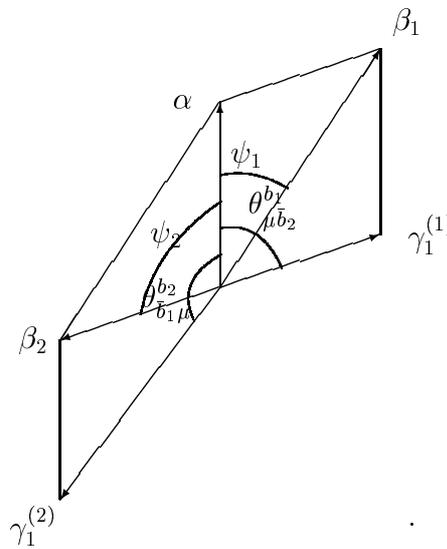


Nun können wir uns der Frage zuwenden, ob es irgendwelche Beiträge gibt, die sich gegenseitig wegheben können, und welche dies konkret sind. Wir nehmen uns den Beitrag zu einem bestimmten Fusionsprozeß  $b_1 = (\mu\sigma_1)$  aus der Summe (4.4) heraus. Dem kann offensichtlich nur ein Beitrag der Form  $b_2 = (\sigma_2\mu)$  aus der Summe (4.5) entsprechen und dazu müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:

1.  $b_1 = \sigma_2$  und  $\beta_1 = \alpha - i\pi + \theta_{\bar{b}_1\mu}^{b_2}$
2.  $b_2 = \bar{\sigma}_1$  und  $\beta_2 = \alpha + i\pi + \theta_{\mu\bar{b}_2}^{b_1}$

Die Rapiditätsbedingungen sind äquivalent zu  $\theta_{\mu\bar{b}_2}^{b_1} + \psi_2 = \theta_{\bar{b}_1\mu}^{b_2} + \psi_1 = i\pi$ .

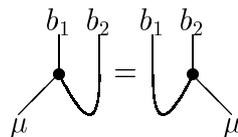
Unter Berücksichtigung dieser Beziehungen können die Impulse nun auch in einem einzigen Diagramm dargestellt werden. Dabei ergibt sich



Da die Pole an verschiedenen Stellen auftreten, wurden die  $\gamma$ 's mit zusätzlichen Indizes gekennzeichnet. Die Überlegungen beweisen, daß es zu jedem Pol einen potentiellen<sup>5</sup> Gegenpart gibt, da das Bootstrap-Bild ja gerade besagt, daß die Fusionsprozesse aus allen möglichen Richtungen betrachtet werden können (vgl. (1.20)). Außerdem ist daraus ersichtlich, daß die Exponentialfaktoren der Formfaktoren (siehe Lemma 11) in beiden Fällen identisch sind. Notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß sich die beiden betrachteten Beiträge kompensieren, ist daher die Erfüllung der Gleichung

$$\eta_{\mu\bar{b}_2}^{b_1} = \epsilon_{\mu\bar{b}_2}^{b_1} \sqrt{|R_{\mu\bar{b}_2}^{b_1}|} \phi_{\mu\bar{b}_2}^{b_1} = \epsilon_{\bar{b}_1\mu}^{b_2} \sqrt{|R_{\bar{b}_1\mu}^{b_2}|} \phi_{\bar{b}_1\mu}^{b_2} = \eta_{\bar{b}_1\mu}^{b_2}, \quad (4.6)$$

die gerade dem Bootstrap-Bild entspricht, da sie die graphische Darstellung



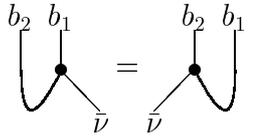
besitzt. Was graphisch offensichtlich ist, muß durch eine geeignete Phasenkonvention sichergestellt sein.

<sup>5</sup>D.h. bis auf einen möglichen unterschiedlichen Faktor.

Eine entsprechende Überlegung kann durchgeführt werden, falls ein Teilchen  $(\alpha, \nu)$  von oben in den Formfaktor einläuft. Dort ergibt sich dann die Bedingung

$$\eta_{b_2 \bar{\nu}}^{b_1} = \epsilon_{b_2 \bar{\nu}}^{b_1} \sqrt{|R_{b_2 \bar{\nu}}^{b_1}|} \phi_{b_2 \bar{\nu}}^{b_1} = \epsilon_{\bar{\nu} b_1}^{b_2} \sqrt{|R_{\bar{\nu} b_1}^{b_2}|} \phi_{\bar{\nu} b_1}^{b_2} = \eta_{\bar{\nu} b_1}^{b_2}.$$

bzw. graphisch



Nach Umbenennung der Teilchen erkennt man, daß das keine neuen Bedingungen sind. Wir fassen das bisherige Ergebnis zusammen in dem

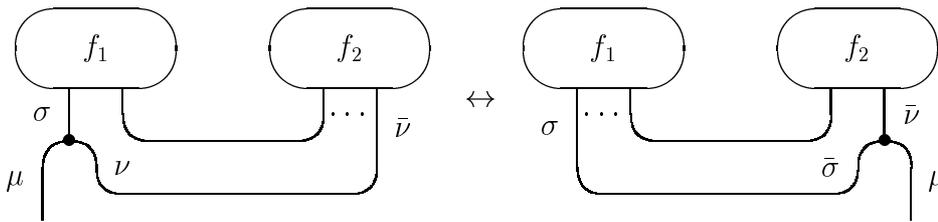
**Lemma 13 (Notwendige Bedingung für Lokalität aus den zush. Anteilen).**

Notwendig für die Lokalität eines Modells ist die Erfüllung der Crossing-Beziehung für die Intertwiner, d.h. von Gleichung (1.20) der Definition 1,

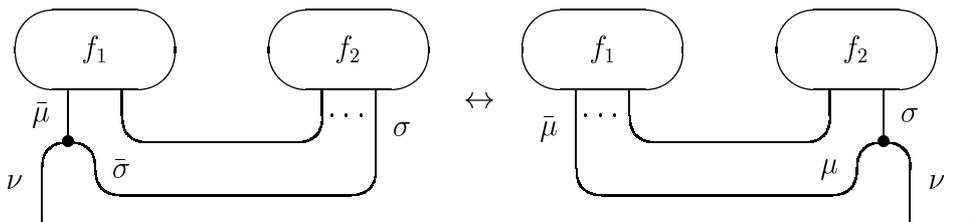
$$\eta_{\mu\nu}^\sigma = \eta_{\bar{\sigma}\mu}^{\bar{\nu}} = \eta_{\bar{\nu}\bar{\sigma}}^{\bar{\mu}}$$

für sämtliche Möglichkeiten der beteiligten Teilchen.

*Beweis.* Schematisch folgt dies aus den jeweils korrespondierenden Diagrammen



und



Dieses schematische Vorgehen ist gerechtfertigt, da bereits vorher gezeigt wurde, daß die entsprechenden Faktoren, die zusätzlich bei den Diagrammen stehen, übereinstimmen.  $\square$

Wir werden im nächsten Abschnitt sehen, daß man auch bei komplizierteren Diagrammen nach Umsortieren der Linien die oben genannten Argumente anbringen kann und daß die oben angeführten Bedingungen für zusammenhängende Matrixelemente nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend ist. Die einzige wirkliche Herausforderung ist das Verstehen der Residuenbeiträge, die von nichtzusammenhängenden Termen stammen.

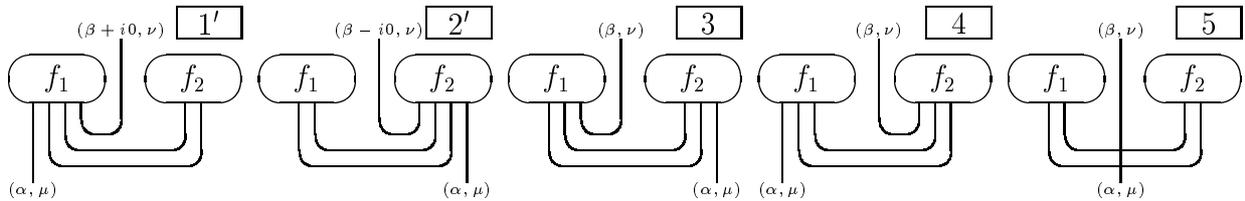
Ein Vergleich mit den in den Tabellen 3.2 und 3.4 angegebenen erweiterten Intertwinern für  $Z(N)$ -Ising- bzw. Sinus-Gordon-Modell ergibt das

**Lemma 14.** Die erweiterten Intertwiner des  $Z(N)$ -Ising- und des Sinus-Gordon-Modells genügen den Bedingungen aus Lemma 13.

### 4.5.2 Der allgemeine Fall

Bisher wurden noch keine Diagramme mit nichtzusammenhängenden Anteilen berücksichtigt, d.h. mit Linien, die von unten nach oben durchlaufen. Da die  $S$ -Matrizen Pole besitzen, die zu gebundenen Zuständen gehören, müssen bei der Verschiebung des Integrationsweges auch dort Residuen berücksichtigt werden. Eine genaue Analyse wird ergeben, daß auch diese Beiträge wegfallen, da die Verallgemeinerung der im vorigen Abschnitt behandelten Diagramme auf Grund der  $\pm i0$ -Beschreibung versteckte nichtzusammenhängende Anteile besitzen. In diesem Abschnitt soll die formale Strenge der Darstellung gegenüber dem letzten etwas gelockert werden, da sie den Blick auf das Wesentliche verstellen würde.

Um die Diagramme übersichtlich zu gestalten, gehen wir von einem Matrixelement mit zwei Einteilchenzuständen aus. Die Überlegungen ändern sich nicht grundsätzlich, wenn neben diesen ausgezeichneten Teilchen auch noch andere Teilchen vorhanden sind, wie wir anschließend sehen werden. Oben sei ein Zustand  $\langle(\beta, \nu)|$  und unten  $|(\alpha, \mu)\rangle$ . Alle in der Darstellung (11) (linke Seite) auftretenden, topologisch verschiedenen Diagramme sind<sup>6</sup>



Die von unten nach oben durchlaufenden Linien in Diagramm 5 stehen für  $\delta$ -Funktionen in den entsprechenden Rapiditäten.

Wir verschieben jetzt wie zuvor die Rapiditäten  $\gamma_i$  der Zwischenzustände, wie im letzten Abschnitt beschrieben. Dabei müssen nacheinander alle Residuen der überstrichenen Pole berücksichtigt werden. Wir greifen uns nun einen speziellen Pol heraus und betrachten die Situation kurz vor der Überstreichung dieses einzelnen Poles, also vor der Berücksichtigung des entsprechenden Residuenbeitrags.

Durch einen Trick ist es möglich, noch *vor* der Berechnung des Residuums die Diagramme zum Verschwinden zu bringen, die  $S$ -Matrizen enthalten. Dabei treten zwar andere nichtzusammenhängende Diagramme auf, die jedoch bei der Residuumbildung wegfallen. Dazu führen wir für die ersten beiden der oben angeführten Diagramme gemäß  $\frac{1}{x \pm i0} = \frac{\mathcal{P}}{x} \mp i\pi\delta(x)$  [40] explizit die Zerlegung in einen Hauptwert- und einen singulären Anteil durch. Im ersten Fall erhält man dabei nach (2.19)

$$\begin{array}{c} \text{Diagram 1} \\ \text{Diagram 5a} \\ \text{Diagram X1} \end{array} - \frac{1}{2} \left( \begin{array}{c} \text{Diagram 5a} \\ \text{Diagram X1} \end{array} \right)$$

<sup>6</sup>Auf nicht unbedingt notwendige Beschriftungen und die Impulsfunktionen wird aus Platzgründen verzichtet. Dies macht nach den Ergebnissen des letzten Abschnitts keine Probleme.



Diagramme trotz der zusätzlichen, in die Formfaktoren einlaufenden Teilchen ineinander überführen lassen.

Wir fassen dieses Resultat, das Hauptergebnis der vorliegenden Diplomarbeit, zusammen in dem

**Theorem 15 (Allgemeines Kommutativitätstheorem).**

*Für die Lokalität bosonischer Felder ist notwendig und hinreichend, daß die im Modell auftretenden  $S$ -Matrizen und Formfaktoren den in den Definitionen 1 und 2 angeführten  $S$ -Matrix- bzw. Formfaktoraxiomen genügen.*

Dieses Theorem gilt unabhängig vom Modell, solange es sich im Rahmen der Definitionen 1 und 2 formulieren läßt. Damit ist insbesondere die Lokalität des  $Z(N)$ -Ising- und des Sinus-Gordon-Modells bewiesen worden, die in Kapitel 3 vorgestellt worden sind.



# Kapitel 5

## Matrix-Differenzengleichung und Off-Shell Bethe Ansatz zur Konstruktion von Höchste-Gewicht-Lösungen für die gradierte Lie-Algebra $spl(2, 1)$

### 5.1 Definitionen

#### 5.1.1 Einleitung

Im zweiten Teil dieser Diplomarbeit werden die Ideen für die Lösung des Matrix-Differenzengleichungsproblems aus [41] und [42], das eine enge Verwandtschaft mit der Watson-Gleichung (2.17) und der zyklischen Formfaktorgleichung (2.18) aufweist, auf die gradierte Lie-Algebra  $spl(2, 1)$  des supersymmetrischen t-J-Modells übertragen [21]. Supersymmetrie tritt in Modellen auf, mit denen sowohl Bosonen als auch Fermionen beschrieben werden. In den definierenden Vertauschungsrelationen der Generatoren einer supersymmetrischen Algebra treten daher neben Kommutatoren auch Antikommutatoren auf. Es wird gezeigt, daß sich mit dem Off-Shell Bethe Ansatz wie zuvor bei den anderen (Quanten-)Gruppen Höchste-Gewicht-Lösungen konstruieren lassen, ohne durch die Supersymmetrie auf neue Probleme zu stoßen. Dies ist ein Hinweis auf die Universalität dieser Methode. Die Hoffnung geht dahin, daß sich mit einer erweiterten Version dieses Ansatzes, die die Polstruktur der Formfaktoren berücksichtigt, für beliebige Modelle die Formfaktoren ausrechnen und bezüglich der zugrundeliegenden Symmetriegruppe klassifizieren lassen [14].

Beim normalen Bethe Ansatz werden Eigenwertprobleme gelöst, indem man einen Ansatz wählt, der die jeweilige Yang-Baxter-Struktur berücksichtigt und bestimmte Parameter enthält, die anfangs unbestimmt sind. Mit Hilfe der Yang-Baxter-Struktur läßt sich dann zeigen, daß bei der Anwendung des Operators auf diesen Bethe Ansatzvektor ein Vektor entsteht, der dem ursprünglichen proportional ist, und ein sogenannter unerwünschter Anteil. Im nachhinein können die Parameter dann durch sogenannte Bethe Ansatzgleichungen so festgelegt werden, daß das Verschwinden der unerwünschten Termen gewährleistet ist (vgl. dazu [15], [21] und [45]). Beim Off-Shell Bethe Ansatz werden die

Bethe Vektoren hingegen noch mit Funktionen multipliziert, die bestimmten Funktionalgleichungen genügen und von der konkreten  $S$ -Matrix abhängen, und es wird ein Integral vom Jackson-Typ ausgeführt, d.h. eine Summe über ein unendliches Gitter. Durch die spezielle Wahl der Multiplikationsfunktionen wird sichergestellt, daß die unerwünschten Terme sich gegenseitig wegsummieren. Es gibt hier also keine Bethe Ansatzgleichungen mehr. Für die gradierte Lie-Algebra  $spl(2, 1)$  ist es notwendig, zwei Bethe Ansätze zu verschachteln.

### 5.1.2 Nomenklatur

Für alle Indizes  $i$  sei  $V_i = \langle |1\rangle, |2\rangle, |3\rangle \rangle \cong \mathbb{C}^3$  und für alle  $n \in \mathbb{N}$  sei  $V_{1\dots n} = V_1 \otimes \dots \otimes V_n$ . Für die spätere Verwendung in der zweiten Stufe des Bethe Ansatzes führen wir außerdem die reduzierten Räume  $\tilde{V}_i = \langle |2\rangle, |3\rangle \rangle \cong \mathbb{C}^2$  und  $\tilde{V}_{1\dots m} = \tilde{V}_1 \otimes \dots \otimes \tilde{V}_m$  ein.

Vektoren in  $V_{1\dots n}$  werden mit den Indizes der Räume gekennzeichnet:  $f^{1\dots n} \in V_{1\dots n}$ . Vektoren in den reduzierten Räumen erhalten zusätzlich eine Tilde:  $\tilde{f}^{1\dots m} \in \tilde{V}_{1\dots m}$ . Bei Operatoren in den Räumen werden die Indizes unten geschrieben:  $Q_{1\dots n} : V_{1\dots n} \rightarrow V_{1\dots n}$ . Man mache sich bewußt, daß die Räume  $V_{\dots ij \dots}$  und  $V_{\dots ji \dots}$  unterschieden werden, obwohl sie isomorph sind. Dies hängt damit zusammen, daß wie im ersten Teil der Arbeit Spektralparameter mit den einzelnen Räumen verknüpft sein sollen.

### 5.1.3 Definition der $S$ -Matrix

Im folgenden werden alle  $S$ -Matrizen als Abbildungen

$$S_{ab}(\theta) : V_a \otimes V_b \rightarrow V_b \otimes V_a$$

aufgefaßt, die die Räume vertauschen, wobei mit jedem Raum ein Spektralparameter verknüpft ist. Dabei soll die graphische Schreibweise

$$S_{ab}(\theta_1 - \theta_2) = \begin{array}{c} V_b \quad V_a \\ \theta_1 \quad \theta_2 \\ V_a \quad V_b \end{array} \quad [S_{ab}(\theta_1 - \theta_2)]_{\alpha\beta}^{\beta'\alpha'} = \begin{array}{c} \beta' \quad \alpha' \\ \theta_1 \quad \theta_2 \\ \alpha \quad \beta \end{array}$$

verwendet werden.

Die Gewichte der  $S$ -Matrix haben im konkreten Fall das Aussehen (alle anderen verschwinden,  $K \in \mathbb{C}$  beliebig,  $\theta = \theta_1 - \theta_2$ ):

$$\begin{array}{c} \alpha \quad \alpha \\ \theta \\ \alpha \quad \alpha \end{array} = a(\theta) = b(\theta) + c(\theta) = 1 \quad (\alpha \neq 3), \quad \begin{array}{c} \beta \quad \alpha \\ \theta \\ \alpha \quad \beta \end{array} = b(\theta) = \frac{\theta}{\theta + K} \quad (\alpha \neq \beta),$$

$$\begin{array}{c} \alpha \quad \beta \\ \theta \\ \alpha \quad \beta \end{array} = c(\theta) = \frac{K}{\theta + K} \quad (\alpha \neq \beta), \quad \begin{array}{c} 3 \quad 3 \\ \theta \\ 3 \quad 3 \end{array} = w(\theta) = -b(\theta) + c(\theta) = \frac{K - \theta}{K + \theta},$$

wobei das „-“ vor dem Gewicht  $b$  in der letzten Gleichung durch den fermionischen Charakter der Teilchen  $|3\rangle$  zustande kommt.

Dies läßt sich kompakt schreiben als

$$S_{ab}(\theta) = b(\theta)\Sigma_{ab} + c(\theta)P_{ab}.$$

Dabei sind der quasi-Identitätsoperator  $\Sigma_{ab}$  und der Permutationsoperator  $P_{ab}$  folgendermaßen definiert:

$$\begin{aligned} \Sigma_{ab} : V_a \otimes V_b &\rightarrow V_b \otimes V_a \\ x \otimes y &\mapsto \sigma_{xy} y \otimes x \\ P_{ab} : V_a \otimes V_b &\rightarrow V_b \otimes V_a \\ x \otimes y &\mapsto x \otimes y. \end{aligned}$$

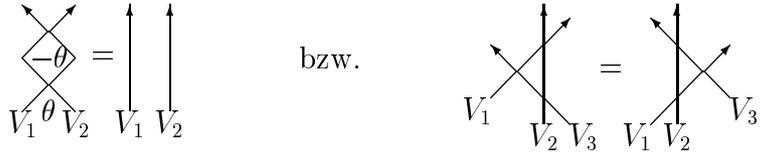
Der Faktor  $\sigma_{xy}$ , der den fermionischen Charakter der Teilchen vom Typ  $|3\rangle$  berücksichtigt, ist gegeben durch

$$\sigma_{xy} = \begin{cases} -1 & , x = y = |3\rangle \\ 1 & , \text{sonst.} \end{cases}$$

Im Anhang wird gezeigt, daß  $S$  unitär ist (Proposition 39) und die Yang-Baxter-Gleichung (YBE) erfüllt (Proposition 40), d.h. es gilt für  $\theta_{ij} = \theta_i - \theta_j$

$$S_{ab}(\theta)S_{ba}(-\theta) = \mathbf{1} \quad \text{und} \quad S_{12}(\theta_{12})S_{13}(\theta_{13})S_{23}(\theta_{23}) = S_{23}(\theta_{23})S_{13}(\theta_{13})S_{12}(\theta_{12}). \quad (5.1)$$

Im folgenden wird dafür die folgende graphische Schreibweise benutzt<sup>1</sup>:



### 5.1.4 Verschiedene Arten von Monodromiematrizen

In diesem Abschnitt werden wir verschiedene Monodromiematrizen definieren, deren Yang-Baxter-Strukturen später nützlich sein werden. Wir beginnen mit

**Definition 4 (Monodromiematrix).** Die Monodromiematrix

$$T_{1\dots n,a}(\vec{x}|u) : V_{1\dots n} \otimes V_a \rightarrow V_a \otimes V_{1\dots n}$$

ist definiert als Tensorprodukt der  $S$ -Matrizen bezüglich dem Quantenraum  $V_{1\dots n}$  und als Matrixprodukt bezüglich dem Hilfsraum  $V_a$ :

$$T_{1\dots n,a}(\vec{x}|u) = S_{1a}(x_1 - u) \cdots S_{na}(x_n - u).$$

Graphisch hat  $T$  daher die Form

$$[T_{1\dots n,a}(\vec{x}|u)]_{\alpha, \{\gamma\}}^{\alpha', \{\gamma'\}} = \alpha' \leftarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \uparrow \gamma'_1 & \uparrow \gamma'_2 & \cdots & \uparrow \gamma'_n \\ |x_1| & |x_2| & & |x_n| \\ \downarrow \gamma_1 & \downarrow \gamma_2 & & \downarrow \gamma_n \end{array} \\ \alpha \end{array} \xrightarrow{u} \alpha$$

In Zukunft schreiben wir häufig auch<sup>2</sup>

$$T_{1\dots n,a} = \begin{pmatrix} A & B_2 & B_3 \\ C^2 & D_2^2 & D_3^2 \\ C^3 & D_2^3 & D_3^3 \end{pmatrix},$$

wobei die Einträge der Matrix Operatoren im Quantenraum  $V_{1\dots n}$  sein sollen.

<sup>1</sup>Über innere Linien wird summiert.

<sup>2</sup>Um die Übersicht zu bewahren, wird bei den Komponenten der Monodromiematrizen die Kennzeichnung der Räume weggelassen, wenn klar ist, um welche es sich handelt.

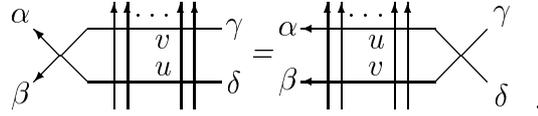
Gleich im Anschluß haben wir das

**Lemma 16 (Yang-Baxter-Gleichung für die Monodromie-Matrix).**

Die Monodromiematrix  $T_{1\dots n,a}$  erfüllt die Yang-Baxter-Gleichungen

$$S_{ab}(u-v)T_{1\dots n,b}(\vec{x}|v)T_{1\dots n,a}(\vec{x}|u) = T_{1\dots n,a}(\vec{x}|u)T_{1\dots n,b}(\vec{x}|v)S_{ab}(u-v) \quad (5.2)$$

bzw. graphisch

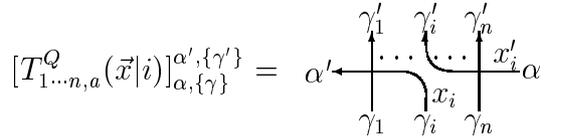


*Beweis.* Die Gleichungen sind eine direkte Folgerung von (5.1). □

**Definition 5 (Modifizierte Monodromiematrix).** Ähnlich zur Monodromiematrix  $T$  kann eine modifizierte Monodromiematrix  $T^Q$  definiert werden über

$$T_{1\dots n,a}^Q(\vec{x}|i) = S_{1a}(x_1 - x_i) \cdots S_{i-1a}(x_{i-1} - x_i) P_{ia} S_{i+1a}(x_{i+1} - x'_i) \cdots S_{na}(x_n - x'_i)$$

mit  $x'_i = x_i + \xi$  ( $\xi$  beliebig, aber fest) bzw. graphisch



Außerdem soll die modifizierte Monodromiematrix analog zu der normalen wie folgt wieder als Matrix über dem Hilfsraum aufgefaßt werden.

$$T_{1\dots n,a}^Q = \begin{pmatrix} A^Q & B_2^Q & B_3^Q \\ C^{Q2} & D_2^{Q2} & D_3^{Q2} \\ C^{Q3} & D_2^{Q3} & D_3^{Q3} \end{pmatrix}.$$

*Bemerkung 1.* Für  $i = n$  gilt wegen  $S_{na}(x_n - x_n) = S_{na}(0) = P_{na}$  die wichtige Beziehung

$$T_{1\dots n,a}^Q(\vec{x}|n) = T_{1\dots n,a}(\vec{x}|x_n).$$

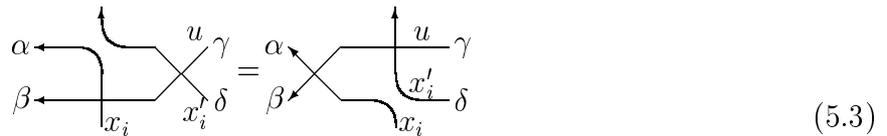
Analog zu eben erhalten wir wieder eine interessante Struktur im folgenden

**Lemma 17 (Yang-Baxter-Gleichung für die modifizierte Monodromie-Matrix).**

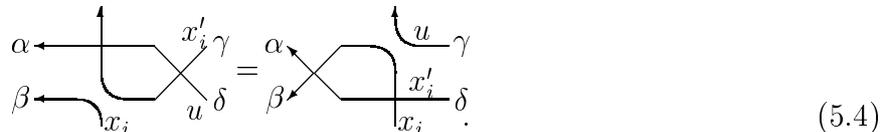
Die modifizierte Monodromie-Matrix erfüllt die Yang-Baxter-Gleichungen

$$\begin{aligned} T_{1\dots n,a}^Q(\vec{x}|i)T_{1\dots n,b}(\vec{x}|u)S_{ab}(x'_i - u) &= S_{ab}(x_i - u)T_{1\dots n,b}(\vec{x}'|u)T_{1\dots n,a}^Q(\vec{x}|i) \\ T_{1\dots n,a}(\vec{x}'|u)T_{1\dots n,a}^Q(\vec{x}|i)S_{ab}(u - x'_i) &= S_{ab}(u - x_i)T_{1\dots n,b}^Q(\vec{x}|i)T_{1\dots n,a}(\vec{x}|u). \end{aligned}$$

Unter Vernachlässigung der Quantenraumstruktur schreibt sich dies schematisch



bzw.



*Beweis.* Durch einfache graphische Manipulation unter Ausnutzung von (5.1).  $\square$

Um die Struktur der  $spl(2, 1)$  zu erhalten, ist es sinnvoll, zusätzlich zu den oben definierten Monodromiematrizen noch weitere einzuführen. Dazu sollen zuerst die Statistikfaktoren die Darstellung

$$\sigma_{\alpha\beta} = \alpha \overset{\curvearrowright}{\bullet} \bullet \beta$$

bekommen. Dieses Objekt wird in Zukunft als Fermionenlinie bezeichnet werden.

**Definition 6 (Fermionische Monodromiematrizen).**

$$[T^*_{1\dots n,a}(\vec{x}|u)]_{\alpha,\{\mu\}}^{\beta,\{\nu\}} = \sigma_{\alpha\beta} \sigma_{\beta,\{\nu\}} [T_{1\dots n,a}(\vec{x}|u)]_{\alpha,\{\mu\}}^{\beta,\{\nu\}}$$

Damit haben wir die graphische Notation

$$[T^*_{1\dots n,a}(\vec{x}|u)]_{\alpha,\{\mu\}}^{\beta,\{\nu\}} = \begin{array}{c} \nu_1 \quad \nu_2 \quad \dots \quad \nu_n \\ \uparrow \quad \uparrow \quad \dots \quad \uparrow \\ \beta \leftarrow \bullet \quad \bullet \quad \dots \quad \bullet \rightarrow \alpha \\ \left| \quad \left| \quad \dots \quad \left| \right. \\ x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n \\ \left| \quad \left| \quad \dots \quad \left| \right. \\ \mu_1 \quad \mu_2 \quad \dots \quad \mu_n \end{array}$$

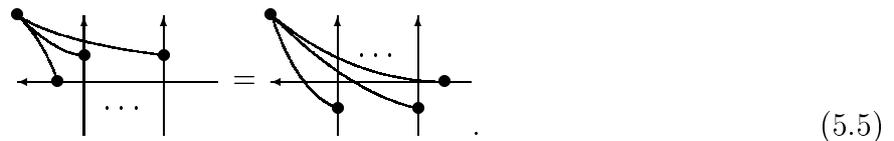
und wollen folgende Matrixschreibweise verwenden:

$$T^*_{1\dots n,a} = \begin{pmatrix} A^* & B^*_2 & B^*_3 \\ C^{\star 2} & D^{\star 2}_2 & D^{\star 2}_3 \\ C^{\star 3} & D^{\star 3}_2 & D^{\star 3}_3 \end{pmatrix}.$$

Entsprechend für die modifizierten Monodromiematrizen.

*Bemerkung 2.* Es gelten offenbar die Identitäten  $A^* = A$ ,  $A^{\star Q} = A^Q$ ,  $B^* = B$  und  $B^{\star Q} = B^Q$ .

Mit den oben eingeführten Fermionenlinien läßt sich zum Beispiel folgendermaßen ausdrücken, daß die Zahl der Fermionen während der Streuung erhalten ist:



Eine Verallgemeinerung dieses Sachverhaltes, die auf die Eigenschaft zurückgeht, daß durch die Fermionenlinien nur der Unterschied gerade/ungerade gezählt wird, beinhaltet der

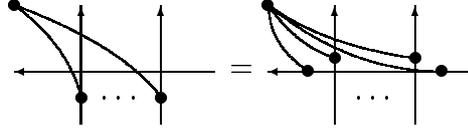
**Satz 18 (Fermionenerhaltung).** *Ist irgendein Index<sup>3</sup>  $\alpha$  durch Fermionlinien mit irgendwelchen Indizes einer Monodromiematrix  $T$  verbunden, so erhält man das gleiche Ergebnis, wenn die Fermionlinien „invertiert“ werden, d.h. zu allen Indizes von  $T$ , die vorher nicht mit  $\alpha$  verbunden waren, zieht man derartige Linien und alle anderen läßt man wegfallen.*

---

<sup>3</sup>Man stelle sich einen äußeren Index vor, es kann allerdings auch ein Index der Monodromiematrix selbst sein.

*Beweis.* Erzeuge durch Einfügen von Doppelfermionlinien eine Struktur, auf die die Fermionenerhaltung in der Form (5.5) anwendbar ist. Anschließend entferne man alle verbleibenden Doppellinien.  $\square$

*Beispiel 1.* Ein später häufig verwendetes Beispiel für den letzten Satz ist die Identität



**Definition 7 (Shiftmatrix).** Durch Spurbildung über den Hilfsraum können aus den modifizierten Monodromiematrizen Shiftmatrizen  $Q$  gewonnen werden gemäß

$$Q_{1\dots n}(\vec{x}|i) = \text{tr}_a T_{1\dots n,a}^{\star Q}(\vec{x}|i) = A_{1\dots n,a}^Q(\vec{x}|i) + \sum_{\alpha=2,3} \left[ D_{1\dots n,a}^{\star Q}(\vec{x}|i) \right]_{\alpha}^{\alpha}. \quad (5.6)$$

Die Shiftmatrix spielt hier die gleiche Rolle wie die Transfermatrizen beim normalen Bethe Ansatz.

In der unteren Stufe des Bethe Ansatzes werden reduzierte Monodromiematrizen  $\tilde{V}_{1\dots m,a} \rightarrow \tilde{V}_{a,1\dots m}$  auftreten, die durch  $\tilde{T}$ ,  $\tilde{T}^Q$ ,  $\tilde{T}^{\star}$  bzw.  $\tilde{T}^{\star Q}$  gekennzeichnet werden. Entsprechendes gelte für ihre Komponenten und die Matrix  $\tilde{Q}$ .

*Beispiel 2.*

$$\tilde{T}_{1\dots m,a}(\vec{x}|u) = \tilde{S}_{1a}(x_1 - u) \cdots \tilde{S}_{ma}(x_m - u).$$

Wie oben kann dafür geschrieben werden

$$\tilde{T}_{1\dots m,a} = \begin{pmatrix} \tilde{A} & \tilde{B} \\ \tilde{C} & \tilde{D} \end{pmatrix},$$

wobei die Einträge der Matrix Operatoren im Quantenraum  $\tilde{V}_{1\dots m}$  sein sollen. Man beachte, daß die Matrix nur eine  $2 \times 2$ -Matrix ist, da wir uns im reduzierten Hilfsraum  $\tilde{V}_a = \langle |2\rangle, |3\rangle \rangle$  befinden.

## 5.2 Yang-Baxter-Struktur

### 5.2.1 Vertauschungsrelationen

Aus den Yang-Baxter-Gleichungen der verschiedenen Monodromiematrizen folgen vielfältige Vertauschungsrelationen, die im folgenden Lemma zusammengestellt sind (Beweis im Anhang E.3).

**Lemma 19 (Vertauschungsrelationen).** *Aus der durch  $S$  definierten Yang-Baxter-Struktur und der Fermionenerhaltung erhält man die folgenden Vertauschungsrelationen:*

$$B_i(\vec{x}'|u_2)B_j(\vec{x}|u_1) = \frac{1}{a(u_1 - u_2)} B_{j'}(\vec{x}'|u_1)B_{i'}(\vec{x}|u_2)S_{j_i}^{i'j'}(u_1 - u_2) \quad (5.7)$$

$$B_j(\vec{x}'|u)B_k^Q(\vec{x}|i) = \frac{1}{a(x_i - u)} B_{k'}^Q(\vec{x}|i)B_{j'}(\vec{x}'|u)S_{k_j}^{j'k'}(x_i - u) \quad (5.8)$$

$$\tilde{B}(\vec{x}'|u_2)\tilde{B}(\vec{x}|u_1) = \frac{w(u_1 - u_2)}{a(u_1 - u_2)} \tilde{B}(\vec{x}|u_1)\tilde{B}(\vec{x}'|u_2) \quad (5.9)$$

$$\tilde{B}(\vec{x}'|u)\tilde{B}^Q(\vec{x}|i) = \frac{w(x'_i - u)}{a(x_i - u)} \tilde{B}^Q(\vec{x}|i)\tilde{B}(\vec{x}'|u) \quad (5.10)$$

$$A(\vec{x}|u_2)B_i(\vec{x}|u_1) = \frac{a(u_2 - u_1)}{b(u_2 - u_1)}B_i(\vec{x}|u_1)A(\vec{x}|u_2) - \frac{c(u_2 - u_1)}{b(u_2 - u_1)}B_i(\vec{x}|u_2)A(\vec{x}|u_1) \quad (5.11)$$

$$A^Q(\vec{x}|i)B_j(\vec{x}|u) = \frac{a(x_i - u)}{b(x'_i - u)}B_j(\vec{x}'|u)A^Q(\vec{x}|i) - \frac{c(x'_i - u)}{b(x'_i - u)}B_j^Q(\vec{x}|i)A(\vec{x}|u) \quad (5.12)$$

$$\tilde{A}(\vec{x}|u_2)\tilde{B}(\vec{x}|u_1) = \frac{a(u_2 - u_1)}{b(u_2 - u_1)}\tilde{B}(\vec{x}|u_1)\tilde{A}(\vec{x}|u_2) - \frac{c(u_2 - u_1)}{b(u_2 - u_1)}\tilde{B}(\vec{x}|u_2)\tilde{A}(\vec{x}|u_1) \quad (5.13)$$

$$\tilde{A}^Q(\vec{x}|i)\tilde{B}(\vec{x}|u) = \frac{a(x_i - u)}{b(x'_i - u)}\tilde{B}(\vec{x}'|u)\tilde{A}^Q(\vec{x}|i) - \frac{c(x'_i - u)}{b(x'_i - u)}\tilde{B}^Q(\vec{x}|i)\tilde{A}(\vec{x}|u) \quad (5.14)$$

$$D^{\star i}_j(\vec{x}|u_2)B_k(\vec{x}|u_1) = \frac{\sigma_{ik}}{b(u_1 - u_2)}B_{k'}(\vec{x}|u_1)D^{\star i}_{j'}(\vec{x}|u_2)S_{kj}^{j'k'}(u_1 - u_2) - \sigma_{ik}\frac{c(u_1 - u_2)}{b(u_1 - u_2)}B_j(\vec{x}|u_2)D^{\star i}_k(\vec{x}|u_1) \quad (5.15)$$

$$D^{\star Qj}_k(\vec{x}|i)B_l(\vec{x}|u) = \sigma_{jl}\frac{1}{b(u - x_i)}B_{l'}(\vec{x}'|u)D^{\star Qj}_{k'}(\vec{x}|i)S_{lk}^{k'l'}(u - x'_i) - \sigma_{jl}\frac{c(u - x_i)}{b(u - x_i)}B_k^Q(\vec{x}|i)D^{\star j}_l(\vec{x}|u) \quad (5.16)$$

$$\tilde{D}^{\star}(\vec{x}|u_2)\tilde{B}(\vec{x}|u_1) = -\frac{w(u_1 - u_2)}{b(u_1 - u_2)}\tilde{B}(\vec{x}|u_1)\tilde{D}^{\star}(\vec{x}|u_2) + \frac{c(u_1 - u_2)}{b(u_1 - u_2)}\tilde{B}(\vec{x}|u_2)\tilde{D}^{\star}(\vec{x}|u_1) \quad (5.17)$$

$$\tilde{D}^{\star Q}(\vec{x}|i)\tilde{B}(\vec{x}|u) = -\frac{w(u - x'_i)}{b(u - x_i)}\tilde{B}(\vec{x}'|u)\tilde{D}^{\star Q}(\vec{x}|i) + \frac{c(u - x_i)}{b(u - x_i)}\tilde{B}^Q(\vec{x}|i)\tilde{D}^{\star}(\vec{x}|u). \quad (5.18)$$

### 5.2.2 Gruppentheoretische Eigenschaften

In diesem Abschnitt soll die algebraische Struktur herausgearbeitet werden, die durch die Yang-Baxter-Gleichungen der angegebenen  $S$ -Matrix definiert wird. Bevor wir damit beginnen, sollen jedoch erst einmal die gradierte Lie-Algebra  $spl(2, 1)$  vorgestellt werden. Die folgende Definition ist in [21] zu finden.

**Definition 8 (Gradierte Lie-Algebra  $spl(2, 1)$ ).** Die einfache gradierte Lie-Algebra  $spl(2, 1)$  ist eine assoziative Algebra über  $\mathbb{C}$ , die in der gradierten Cartan-Chevalley-Basis von den Generatoren  $h_i, e_i, f_i$  ( $i = 1, 2$ ) erzeugt wird, die den folgenden Vertauschungsrelationen genügen:

$$\begin{aligned} [h_i, f_j]_- &= a_{ij}f_j & [h_i, e_j]_- &= -a_{ij}e_j & [h_i, h_j]_- &= 0 \\ [f_1, e_1]_- &= h_1 & [f_1, e_2]_- &= 0 & [f_2, f_2]_+ &= [e_2, e_2]_+ = 0 \\ [f_2, e_2]_+ &= h_2 & [f_2, e_1]_- &= 0. \end{aligned}$$

Die gradierte Cartan-Matrix ist dabei gegeben durch

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Außerdem müssen die Generatoren die kubischen Serre-Relationen

$$\begin{aligned} f_1^2 f_2 - 2f_1 f_2 f_1 + f_2 f_1^2 &= 0 & f_1 f_2^2 - f_2^2 f_1 &= 0 \\ e_1^2 e_2 - 2e_1 e_2 e_1 + e_2 e_1^2 &= 0 & e_1 e_2^2 - e_2^2 e_1 &= 0 \end{aligned}$$

erfüllen. Die Elemente  $h_i, e_1, f_1$  heißen gerade Generatoren,  $e_2, f_2$  ungerade. Diese Bezeichnung ergibt sich aus den Vertauschungsrelationen.

Bevor wir auf die Yang-Baxter-Struktur zurückkommen, rufe man sich in Erinnerung, daß

Die erste wichtige Feststellung ist

$$\begin{aligned} \theta \rightarrow \infty : \quad b(\theta) &\sim 1 \\ c(\theta) &\sim \frac{K}{\theta} \\ \Rightarrow S_{ab}(\theta) &\sim \Sigma_{ab} + \frac{K}{\theta} P_{ab}. \end{aligned}$$

Daraus folgt die Existenz einer asymptotischen Entwicklung der Form

$$\begin{aligned} [T_{1 \dots n, a}(\vec{\theta} | \vartheta)]_{\alpha, \{\gamma\}}^{\beta, \{\nu\}} &= [\Sigma_{1a} \dots \Sigma_{na} + \frac{K}{\vartheta} \sum_{j=1}^n \Sigma_{1a} \dots P_{ja} \dots \Sigma_{na}]_{\alpha, \{\gamma\}}^{\beta, \{\nu\}} + O(\vartheta^{-2}) \\ &= \sigma_{\alpha, \{\mu\}} \delta_{\alpha}^{\beta} \delta_{\{\mu\}}^{\{\nu\}} + \frac{K}{\vartheta} \sigma_{\beta\alpha} \sigma_{\beta, \{\nu\}} M_{\alpha, \{\mu\}}^{\beta, \{\nu\}} + O(\vartheta^{-2}) \end{aligned}$$

bzw. graphisch

Die Operatoren  $M_{\alpha, \{\mu\}}^{\beta, \{\nu\}}$  haben dabei die Darstellung

$$M_{\alpha}^{\beta} = \beta \left[ \text{diagram with dot on top-left line} \right] \alpha = \sum_j \beta \left[ \text{diagram with dot on bottom-left line} \right] \alpha \tag{5.19}$$

bzw. in Formeln

$$M_{\alpha, \{\mu\}}^{\beta, \{\nu\}} = \sum_j \sigma_{\beta\nu_{j+1}} \dots \sigma_{\beta\nu_n} \sigma_{\alpha\nu_{j+1}} \dots \sigma_{\alpha\nu_n} \delta_{\mu_1}^{\nu_1} \dots \delta_{\mu_{j-1}}^{\nu_{j-1}} \delta_{\mu_j}^{\beta} \delta_{\alpha}^{\nu_j} \delta_{\mu_{j+1}}^{\nu_{j+1}} \dots \delta_{\mu_n}^{\nu_n}. \tag{5.20}$$

Damit lassen sich aus (5.2) die folgenden Vertauschungsrelationen<sup>4</sup> herleiten (siehe Anhang E.3, Lemma 42):

$$M_{\alpha}^{\alpha'} T_{\beta}^{\beta'}(u) - \sigma_{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta'} \sigma_{\alpha'\beta} \sigma_{\alpha'\beta'} T_{\beta}^{\beta'}(u) M_{\alpha}^{\alpha'} = \delta_{\beta}^{\alpha'} T_{\alpha}^{\beta'}(u) - \sigma_{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta'} \sigma_{\alpha'\beta} \sigma_{\alpha'\beta'} \delta_{\alpha}^{\beta'} T_{\beta}^{\alpha'}(u) \tag{5.21}$$

<sup>4</sup>In Zukunft werden die Kennzeichnung der Räume und die Quantenraumindizes und -argumente weggelassen, wenn keine Mißverständnisse auftreten können

Für  $u \rightarrow \infty$  folgt

$$M_\alpha^{\alpha'} M_\beta^{\beta'} - \sigma_{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta'} \sigma_{\alpha'\beta} \sigma_{\alpha'\beta'} M_\beta^{\beta'} M_\alpha^{\alpha'} = \delta_\beta^{\alpha'} M_\alpha^{\beta'} - \sigma_{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta'} \sigma_{\alpha'\beta} \sigma_{\alpha'\beta'} \delta_\alpha^{\beta'} M_\beta^{\alpha'}. \quad (5.22)$$

Das impliziert, daß die Operatoren  $M_\alpha^{\alpha'}$  die Generatoren der  $spl(2, 1)$  in der Cartan-Weyl-Basis sind (vgl. [21]). Die Operatoren  $W_\alpha = M_\alpha^\alpha$  (keine Summation über  $\alpha$ !) erfüllen nach (5.22) die Vertauschungsrelationen  $[W_\alpha, W_\beta]_- = 0$  und erzeugen die Cartansche Unteralgebra. Sie heißen Gewichtsooperatoren. Nach (5.20) fallen die Vorzeichenfaktoren für sie weg, so daß gilt<sup>5</sup>

$$[W_\alpha]_{\{\mu\}}^{\{\nu\}} = \sum_j \delta_{\mu_1}^{\nu_1} \dots \delta_{\mu_{j-1}}^{\nu_{j-1}} \delta_{\mu_j}^\alpha \delta_{\mu_j}^{\nu_j} \delta_{\mu_{j+1}}^{\nu_{j+1}} \dots \delta_{\mu_n}^{\nu_n}. \quad (5.23)$$

### 5.3 $spl(2, 1)$ -Matrix-Differenzengleichung und Off-Shell Bethe Ansatz zur Konstruktion von Höchste-Gewicht-Lösungen

#### 5.3.1 Definition der Matrix-Differenzengleichung

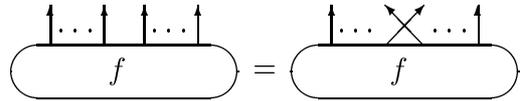
**Definition 9** (*S*-Symmetrie und *Q*-Periodizität).

Sei  $S$  die oben angegebene *S*-Matrix und  $f^{1\dots n} : \mathbb{C}^n \rightarrow V^{1\dots n}$  eine vektorwertige Funktion.

1.  $f^{1\dots n}$  heißt *S*-symmetrisch, falls

$$f^{\dots ij \dots}(\dots, x_i, x_j, \dots) = S_{ji}(x_j - x_i) f^{\dots ji \dots}(\dots, x_j, x_i, \dots). \quad (5.24)$$

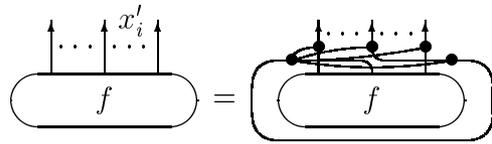
Graphisch bedeutet dies



2.  $f^{1\dots n}$  heißt *Q*-periodisch, falls für alle  $i = 1, \dots, n$  mit  $\vec{x}' = \vec{x} + \xi \vec{e}_i$  die Matrix-Differenzengleichung

$$f^{1\dots n}(\vec{x}') = Q_{1\dots n}(\vec{x}|i) f^{1\dots n}(\vec{x}) \quad (5.25)$$

erfüllt ist. Anschaulich bedeutet dies



wobei die Vereinbarung

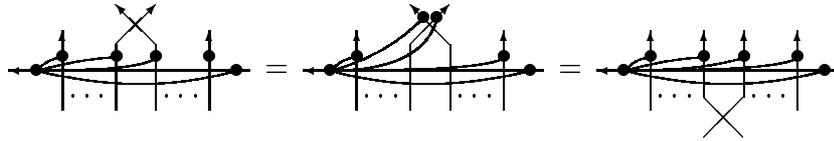
$$x \frown x - \frac{\xi}{2} \qquad x \cup x + \frac{\xi}{2}$$

verwendet wurde (vgl. [14]).

---

<sup>5</sup>Es wird nicht über  $\alpha$  summiert!

*Bemerkung 3.* Da  $S$  die Yang-Baxter-Gleichung (5.1) erfüllt und wir die Fermionenerhaltung aus Satz 18 haben, sind die beiden Bedingungen miteinander verträglich. Dies ist unmittelbar einsichtig über die Gleichungen



**Lemma 20.** *Ist  $f^{1\dots n}$   $S$ -symmetrisch und gilt die Gleichung*

$$f^{1\dots n}(\vec{x}') = Q_{1\dots n}(\vec{x}'|i) f^{1\dots n}(\vec{x})$$

für ein  $i \in \{1, \dots, n\}$ , so gilt sie bereits für alle  $i \in \{1, \dots, n\}$ , d.h.  $f^{1\dots n}$  ist  $Q$ -periodisch.

*Beweis.* Die Behauptung ergibt sich sofort mittels graphischer Manipulation aus (5.24) und (5.25) unter Berücksichtigung der Fermionenerhaltung aus Satz 18.  $\square$

Die Eigenschaft,  $Q$ -periodisch zu sein, ist eng verwandt mit der Erfüllung der zyklischen Gleichung (2.18) für den Fall, daß es sich bei  $f^{1\dots n}$  um einen Formfaktor handelt. Analog ist dann die  $S$ -Symmetrie nichts anderes als die Watson-Gleichung (2.17). Eventuell ist es möglich, die Statistik-Faktoren explizit in die  $S$ -Matrix mitaufzunehmen. Dies wird jedenfalls dadurch nahegelegt, daß selbige in [21] bei der  $q$ -deformierten Version der  $S$ -Matrix nicht mehr auftreten.

Der gruppentheoretischen Klassifikation der später zu konstruierenden Lösungen dient das

**Satz 21.** *Ist  $f^{1\dots n}$   $Q$ -periodisch, so ist auch  $M_\alpha^\beta f^{1\dots n}$   $Q$ -periodisch, wobei  $M_\alpha^\beta$  einer der Generatoren der  $spl(2, 1)$  ist.*

*Beweis.* Aus den Vertauschungsrelationen (5.21), die auch für die modifizierte Monodromiematrix  $T^{*Q}$  gelten, ist ersichtlich, daß  $Q$  mit den Generatoren der  $spl(2, 1)$  vertauscht:  $[M_\alpha^\beta, Q]_- = 0$ .  $\square$

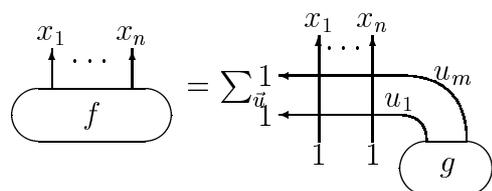
### 5.3.2 Der Off-Shell Bethe Ansatz

**Definition 10 (Bethe Ansatzfunktion erster Stufe).**

$f^{1\dots n} : \mathbb{C}^n \rightarrow V^{1\dots n}$  heißt Bethe Ansatzfunktion der ersten Stufe, falls

$$f^{1\dots n}(\vec{x}) = \sum_{\vec{u}} B_{\beta_m}(\vec{x}|u_m) \cdots B_{\beta_1}(\vec{x}|u_1) \Omega^{1\dots n} [g^{1\dots m}(\vec{x}|\vec{u})]^{\beta_1 \cdots \beta_m}$$

bzw. graphisch



Dabei ist die Summe über alle  $\vec{u} \in \vec{u}_0 - \xi\mathbb{Z}^m \subset \mathbb{C}^m$  auszuführen („Integral vom Jackson-Typ“,  $\vec{u}_0 \in \mathbb{C}^m$  beliebig).  $\Omega^{1\dots n}$  ist ein Referenzzustand

$$\Omega^{1\dots n} = |1\rangle^{\otimes n}$$

und die Hilfsfunktion  $g^{1\dots m} : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m \rightarrow \tilde{V}^{1\dots m}$  gegeben durch

$$g^{1\dots m}(\vec{x}|\vec{u}) = \eta(\vec{x}|\vec{u}) \tilde{f}^{1\dots m}(\vec{u})$$

mit  $\eta : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}$

$$\eta(\vec{x}|\vec{u}) = \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m \psi(x_i - u_j) \prod_{1 \leq i < j \leq m} \tau(u_i - u_j),$$

wobei  $\tilde{f}^{1\dots m} : \mathbb{C}^m \rightarrow \tilde{V}^{1\dots m}$   $\tilde{S}$ -symmetrisch und  $\tilde{Q}$ -periodisch ist und die Hilfsfunktionen  $\psi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  und  $\tau : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  die Funktionalgleichungen

$$\begin{aligned} b(x)\psi(x) &= \psi(x - \xi) \\ \frac{\tau(x)}{b(x)} &= \frac{\tau(x - \xi)}{b(\xi - x)} \end{aligned} \quad (5.26)$$

erfüllen.

**Definition 11 (Bethe Ansatzfunktion zweiter Stufe).**

$\hat{f}^{1\dots m} : \mathbb{C}^m \rightarrow \tilde{V}^{1\dots m}$  heißt Bethe Ansatzfunktion der zweiten Stufe, falls

$$\hat{f}^{1\dots m}(\vec{u}) = \sum_{\vec{v}} \tilde{B}(\vec{u}|v_k) \cdots \tilde{B}(\vec{u}|v_1) \tilde{\Omega}^{1\dots m} \tilde{g}(\vec{u}|\vec{v}).$$

Dabei ist die Summe über alle  $\vec{v} \in \vec{v}_0 - \xi\mathbb{Z}^k \subset \mathbb{C}^k$  auszuführen („Integral vom Jackson-Typ“,  $\vec{v}_0 \in \mathbb{C}^k$  beliebig).  $\tilde{\Omega}^{1\dots m}$  ist diesmal der Referenzzustand

$$\tilde{\Omega}^{1\dots m} = |2\rangle^{\otimes m}$$

und die Hilfsfunktion  $\tilde{g} : \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^k \rightarrow \mathbb{C}$  gegeben durch

$$\tilde{g}(\vec{u}|\vec{v}) = \prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^k \psi(u_i - v_j) \prod_{1 \leq i < j \leq k} \tilde{\tau}(v_i - v_j),$$

wobei die Hilfsfunktionen  $\psi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  und  $\tilde{\tau} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  die Funktionalgleichungen

$$\begin{aligned} b(x)\psi(x) &= \psi(x - \xi) \\ \frac{\tilde{\tau}(x)}{b(-x)} &= \frac{\tilde{\tau}(x - \xi)}{b(\xi - x)} \end{aligned} \quad (5.27)$$

erfüllen.

*Bemerkung 4.* Mögliche Lösungen der Funktionalgleichungen (5.26)-(5.27) sind

$$\psi(x) = \frac{\Gamma(1 + \frac{K}{\xi} + \frac{x}{\xi})}{\Gamma(1 + \frac{x}{\xi})}, \quad \tau(x) = x \frac{\Gamma(\frac{x}{\xi} - \frac{K}{\xi})}{\Gamma(1 + \frac{x}{\xi} + \frac{K}{\xi})}, \quad \tilde{\tau}(x) = \frac{x}{x - K}.$$

Der Beweis für diese Behauptung ist in Lemma 43 im Anhang angegeben.

Wir werden später sehen, daß die Bethe Ansatzfunktion erster Stufe die Matrix-Differenzgleichung (5.25) in Verbindung mit (5.24) erfüllt. Der Beweis verläuft grob folgendermaßen: Die Bestandteile  $A$  und  $D$  der Shiftmatrix (5.6) werden mit Hilfe der Vertauschungsrelationen aus Lemma 19 durch die  $B$ -Operatoren in den Bethe Ansatzfunktionen hindurchgezogen. Dabei entstehen gewünschte Beiträge, die genau die Aussage der Matrixdifferenzgleichung enthalten und unerwünschte Beiträge, die man wieder loswerden möchte. Die definierenden Funktionalgleichungen (5.26) und (5.27) gewährleisten gerade, daß sich die unerwünschten Beiträge von  $A$  bzw.  $D$  gegenseitig aufheben. Dazu ist eine Parameterverschiebung notwendig, weshalb in den Bethe Ansatzfunktionen auch die unendlichen Summen über ein Gitter vorkommen. Um den Beweis möglichst übersichtlich zu gestalten, ist er in viele relativ eng umgrenzte Lemmas und Sätze aufgeteilt, die hauptsächlich wichtige Funktionalgleichungen enthalten, die an Ort und Stelle zu beweisen, den Umfang des Hauptbeweises sehr stark hätten anwachsen lassen. Das Problem für die Bethe Ansatzfunktion erster Stufe  $f^{1\dots n}$  wird auf das der Funktion  $\tilde{f}^{1\dots m}$  in den reduzierten Räumen zurückgeführt. Anschließend wird gezeigt, daß die so konstruierten Lösungen Höchste-Gewicht-Lösungen bezüglich der gradierten Lie-Algebra  $spl(2, 1)$  sind, aus denen sich wegen Satz 21 durch Anwendung von Auf- und Absteigeoperatoren weitere Lösungen konstruieren lassen.

Die Referenzzustände wurden so gewählt, daß sie besonders angenehme Eigenschaften in Bezug auf die Bestandteile  $A$  und  $D$  der Shiftmatrix (5.6) haben. So haben wir das

**Lemma 22 (Eigenwertgleichungen).**

*Die Betheansatz-Vektoren der ersten und zweiten Stufe erfüllen die Eigenwertgleichungen*

$$\begin{aligned}
 A^Q(\vec{x}|m)\Omega^{1\dots n} &= \Omega^{1\dots n} \\
 A(\vec{x}|\vec{u})\Omega^{1\dots n} &= \Omega^{1\dots n} \\
 [D^{\star Q}(\vec{x}|m)]_\alpha^{\alpha'} \Omega^{1\dots n} &= 0 \\
 [D^\star(\vec{x}|\vec{u})]_\alpha^{\alpha'} \Omega^{1\dots n} &= \delta_\alpha^{\alpha'} \sigma_{\alpha\alpha'} \prod_{j=1}^n b(x_j - u_j) \Omega^{1\dots n} \tag{5.28} \\
 \tilde{A}^Q(\vec{u}|m)\tilde{\Omega}^{1\dots m} &= \tilde{\Omega}^{1\dots m} \\
 \tilde{A}(\vec{u}|\vec{v}_i)\tilde{\Omega}^{1\dots m} &= \tilde{\Omega}^{1\dots m} \\
 \tilde{D}^{\star Q}(\vec{u}|m)\tilde{\Omega}^{1\dots m} &= 0 \\
 \tilde{D}^\star(\vec{u}|\vec{v}_i)\tilde{\Omega}^{1\dots m} &= -\prod_{l=1}^m b(u_l - v_i)\tilde{\Omega}^{1\dots m}.
 \end{aligned}$$

*Beweis.* Die Formeln lassen sich leicht graphisch einsehen, wenn man die Teilchentyperhaltung verwendet. Als Beispiel sei hier die Formel

$$[D^{\star Q}(\vec{x}|n)]_\alpha^{\alpha'} \Omega^{1\dots n} = 0$$

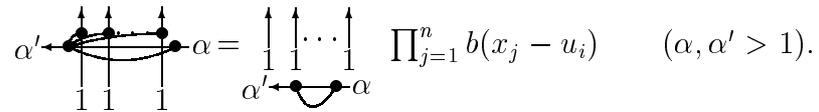
bzw. graphisch

The diagram shows a horizontal line with three vertical lines extending upwards from it. The leftmost vertical line has a dot at the top and is labeled  $\alpha'$  to its left. The middle vertical line has a dot at the top and is labeled  $1$  below it. The rightmost vertical line has a dot at the top and is labeled  $1$  below it. A curved arrow starts from the top of the rightmost vertical line, goes up and then left, ending at the top of the middle vertical line. Another curved arrow starts from the top of the middle vertical line, goes up and then left, ending at the top of the leftmost vertical line. To the right of the diagram is the equation  $= 0 \quad (\alpha, \alpha' > 1)$ .

hergeleitet. Wir fangen rechts an, das Diagramm zu lesen. Das  $\alpha$  wird nach oben umgelenkt. Nach den Erhaltungsregeln für die Teilchensorten, werden die zwei Einsen links davon beide wieder in Einsen gestreut, wobei der Faktor  $a \equiv 1$  entsteht. Dies setzt sich nach links fort. Irgendwann trifft dann eine 1 auf  $\alpha' > 1$  (wir haben es mit einem  $D$ -Element zu tun!), weshalb der gesamte Ausdruck verschwinden muß. Ein komplizierteres Beispiel ist

$$[D^*(\vec{x}|\vec{u})]_{\alpha}^{\alpha'} \Omega^{1 \cdots n} = \delta_{\alpha}^{\alpha'} \sigma_{\alpha\alpha'} \prod_{j=1}^n b(x_j - u_j) \Omega^{1 \cdots n}$$

mit dem Bild



$$\alpha' \leftarrow \begin{array}{c} \uparrow \\ \uparrow \\ \uparrow \end{array} \alpha = \prod_{j=1}^n b(x_j - u_j) \quad (\alpha, \alpha' > 1).$$

Die Formel kommt offensichtlich dadurch zustande, daß das Teilchen  $\alpha$  überall nach links und die 1 immer nach oben gestreut werden. Es muß nur noch begründet werden, wieso es keine anderen Beiträge gibt. Nehmen wir an, das Teilchen  $\alpha$  sei an einer Stelle nach oben und die 1 nach links gestreut worden. Wie im vorherigen Fall streuen dann weiter links nur noch Einsen in Einsen, bis eine von ihnen auf das  $\alpha' > 1$  trifft. Solche Anteile können in dem betrachteten Matrixprodukt also nicht auftreten.  $\square$

Die definierenden Funktionalgleichungen der Funktionen  $\psi$ ,  $\tau$ , und  $\tilde{\tau}$  gewährleisten die Aussage von

**Lemma 23 (Funktionalgleichungen für  $\eta$  und  $\tilde{g}$ ).**

Die oben angegebenen Funktionen  $\eta$  bzw.  $\tilde{g}$  erfüllen die Gleichungen

$$\prod_{l=1}^k \frac{a(u_m - v_l)}{b(u'_m - v_l)} \tilde{g}(\vec{u}|\vec{v}) = \tilde{g}(\vec{u}'|\vec{v}) \quad \prod_{l=1}^m \frac{a(x_n - u_l)}{b(x'_n - u_l)} \eta(\vec{x}|\vec{u}) = \eta(\vec{x}'|\vec{u}). \quad (5.29)$$

*Beweis.* Einsetzen der Definition ergibt mit (5.27)

$$\begin{aligned} \prod_{l=1}^k \frac{a(u_m - v_l)}{b(u'_m - v_l)} \tilde{g}(\vec{u}|\vec{v}) &= \prod_{l=1}^k \frac{1}{b(u'_m - v_l)} \prod_{i=1}^m \prod_{l=1}^k \psi(u_i - v_l) \prod_{1 \leq i < j \leq k} \tilde{\tau}(v_i - v_j) \\ &= \prod_{l=1}^k \frac{\psi(u_m - v_l)}{b(u'_m - v_l)} \prod_{i=1}^{m-1} \prod_{l=1}^k \psi(u_i - v_l) \prod_{1 \leq i < j \leq k} \tilde{\tau}(v_i - v_j) \\ &= \prod_{l=1}^k \psi(u'_m - v_l) \prod_{i=1}^{m-1} \prod_{l=1}^k \psi(u_i - v_l) \prod_{1 \leq i < j \leq k} \tilde{\tau}(v_i - v_j) = \tilde{g}(\vec{u}'|\vec{v}). \end{aligned}$$

Für  $\eta$  verläuft der Beweis im Prinzip genauso, da sich  $\tilde{g}$  und  $\eta$  nur durch die Ersetzung  $\tilde{\tau} \rightarrow \tau$  unterscheiden.  $\square$

Der nächste Satz ist der erste wichtige Schritt auf dem Weg zum Beweis, daß die oben definierten Bethe Ansatzfunktionen die Matrix-Differenzgleichung (5.25) lösen.

**Satz 24.**

Mit  $\vec{u}' = \vec{u} + \xi \vec{e}_m$  gilt die Identität

$$\begin{aligned} \tilde{A}^{\star Q}(\vec{u}|m) \tilde{f}^{1 \cdots m}(\vec{u}) &= \tilde{f}^{1 \cdots m}(\vec{u}') \\ &+ \sum_{\vec{v}} \sum_{i=1}^k \tilde{\Lambda}_A^{(i)}(\vec{u}|\vec{v}) \tilde{B}^Q(\vec{u}|m) \tilde{B}(\vec{u}|v_k) \cdots \widehat{\tilde{B}(\vec{u}|v_i)} \cdots \tilde{B}(\vec{u}|v_1) \tilde{\Omega} \tilde{g}(\vec{u}|\vec{v}) \end{aligned} \quad (5.30)$$

$$\begin{aligned} \tilde{D}^{\star Q}(\vec{u}|m) \tilde{f}^{1 \cdots m}(\vec{u}) \\ = \sum_{\vec{v}} \sum_{i=1}^k \tilde{\Lambda}_D^{(i)}(\vec{u}|\vec{v}) \tilde{B}^Q(\vec{u}|m) \tilde{B}(\vec{u}|v_k) \cdots \widehat{\tilde{B}(\vec{u}|v_i)} \cdots \tilde{B}(\vec{u}|v_1) \tilde{\Omega} \tilde{g}(\vec{u}|\vec{v}), \end{aligned} \quad (5.31)$$

wobei

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda}_A^{(i)}(\vec{u}|\vec{v}) &= -\frac{c(u'_m - v_i)}{b(u'_m - v_i)} \prod_{l < i} \frac{1}{b(v_i - v_l)} \prod_{l > i} \frac{-1}{b(v_l - v_i)} \\ \tilde{\Lambda}_D^{(i)}(\vec{u}|\vec{v}) &= \frac{c(v_i - u_m)}{b(v_i - u_m)} \prod_{l < i} \frac{1}{b(v_i - v_l)} \prod_{l > i} \frac{-1}{b(v_l - v_i)} \prod_{l=1}^m b(u_l - v_i). \end{aligned}$$

Die Schreibweise  $\widehat{\tilde{B}(\vec{u}|v_i)}$  soll heißen, daß dieser Faktor nicht in dem Produkt auftritt.

*Beweis.* Wie vorher schon erwähnt, gilt  $\tilde{A}^{\star Q} = \tilde{A}^Q$  und  $\tilde{A}^{\star} = \tilde{A}$ . Unser Ziel ist es, die Operatoren  $\tilde{A}^Q$  und  $\tilde{D}^{\star Q}(\vec{u}|m)$  unter Ausnutzung der Vertauschungsrelationen aus Lemma 19 durch die  $\tilde{B}$ -Operatoren in der Darstellung von  $\tilde{f}$  hindurchzuziehen. Generell heißen Vertauschungen „erwünschte“, falls der Teil berücksichtigt wird, bei dem die Argumente an den jeweiligen Operatoren verbleiben und „unerwünschte“ im anderen Fall.

Zuerst wollen wir uns überzeugen, daß die gewünschten Beiträge stimmen. Wegen  $\tilde{D}^{\star Q} \tilde{\Omega} = 0$  ist das für  $\tilde{D}^{\star Q}$  kein Problem. Schwieriger wird es für  $\tilde{A}^Q$ . Tauscht man dies „gewünscht“ durch alle  $\tilde{B}$ -Operatoren, so werden in diesen alle Argumente  $\vec{u}$  in  $\vec{u}'$  umgewandelt und man erhält zusätzlich den Faktor  $\prod_{l=1}^k \frac{a(u_m - v_l)}{b(u'_m - v_l)}$ . Die Anwendung von  $\tilde{A}^Q$  auf  $\tilde{\Omega}$  ergibt nach Lemma 22 keinen weiteren Faktor. Mit Lemma 23 folgt daher

$$\prod_{l=1}^k \frac{a(u_m - v_l)}{b(u'_m - v_l)} \tilde{g}(\vec{u}|\vec{v}) = \tilde{g}(\vec{u}'|\vec{v})$$

und damit der erste Teil der beiden Gleichungen.

Der nächste Schritt besteht darin, sich davon zu überzeugen, daß beim Durchtauschen keine anderen Terme entstehen als oben angegeben sind. Das funktioniert für  $\tilde{A}^Q$  und  $\tilde{D}^{\star Q}$  gleichermaßen, weshalb im folgenden nur  $\tilde{A}^Q$  betrachtet werden soll. Um zu einem der  $\tilde{\Lambda}^{(i)}$ -Terme zu gelangen, ist es notwendig, mindestens einmal „unerwünscht“ zu vertauschen, wobei man offenbar zuerst zu einem Ausdruck proportional zu

$$\tilde{B}(\vec{u}'|v_k) \cdots \tilde{B}^Q(\vec{u}|m) \tilde{A}(\vec{u}|v_i) \cdots \tilde{B}(\vec{u}|v_1)$$

gelangt. Unter Verwendung von (5.10) bekommen wir einen Ausdruck proportional

$$\tilde{B}^Q(\vec{u}|m) \tilde{B}(\vec{u}|v_k) \cdots \widehat{\tilde{B}(\vec{u}|v_i)} \tilde{A}(\vec{u}|v_i) \cdots \tilde{B}(\vec{u}|v_1). \quad (5.32)$$

Unter Berücksichtigung von (5.13) gilt dann: Vertauscht man  $\tilde{A}$  jetzt nur noch „gewünscht“, so gelangt man zu einem Beitrag für den  $\tilde{\Lambda}^{(i)}$ -Term. Vertauscht man jedoch irgendwann noch einmal „unerwünscht“, so entsteht wieder ein  $\tilde{B}(\vec{u}|v_i)$  sowie ein  $\tilde{A}(\vec{u}|v_j)$ . Dafür geht ein  $\tilde{B}(\vec{u}|v_j)$  verloren. Mit Hilfe von (5.9) kann dies auf (5.32) zurückgeführt werden, wobei nur  $i$  durch  $i'$  ersetzt wurde.

Zur Bestimmung der unerwünschten Beiträge geht man folgendermaßen vor:

- (i) Tausche  $\tilde{B}(\vec{u}|v_i)$  ans vordere Ende der  $\tilde{B}$ -Operatoren. Dabei entsteht in beiden Fällen der Faktor  $\prod_{l>i} w(v_i - v_l)$ .
- (ii) Um das  $Q$  auf das  $\tilde{B}(\vec{u}|v_i)$  abzuwälzen, vertausche jetzt „unerwünscht“. Dies ergibt die Faktoren  $-\frac{c(u'_m - v_i)}{b(u'_m - v_i)}$  (für  $A$ ) bzw.  $\frac{c(v_i - u_m)}{b(v_i - u_m)}$  (für  $D$ ).
- (iii) Tauscht man die neu entstandenen Operatoren „gewünscht“ durch, erhält man die Faktoren  $\prod_{l \neq i} \frac{a(v_i - v_l)}{b(v_i - v_l)}$  (für  $A$ ) bzw.  $\prod_{l \neq i} \left(-\frac{w(v_l - v_i)}{b(v_l - v_i)}\right)$  (für  $D$ ).
- (iv) Aus den Eigenwertgleichungen für  $\tilde{A}$  bzw.  $D^{*Q}$  kommen die zusätzlichen Faktoren 1 (für  $A$ ) bzw.  $-\prod_{l=1}^m b(u_l - v_i)$  (für  $D$ ).

Faßt man alle Faktoren zusammen, gelangt man unter Verwendung der Beziehungen  $a \equiv 1$ ,  $w(\theta)w(-\theta) = 1$  und  $\frac{w(\theta)}{b(\theta)} = \frac{-1}{b(-\theta)}$  zu

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda}_A^{(i)}(\vec{u}|\vec{v}) &= -\frac{c(u'_m - v_i)}{b(u'_m - v_i)} \prod_{l>i} w(v_i - v_l) \prod_{l \neq i} \frac{a(v_i - v_l)}{b(v_i - v_l)} \\ &= -\frac{c(u'_m - v_i)}{b(u'_m - v_i)} \prod_{l<i} \frac{1}{b(v_i - v_l)} \prod_{l>i} \frac{-1}{b(v_l - v_i)} \\ \tilde{\Lambda}_D^{(i)}(\vec{u}|\vec{v}) &= -\frac{c(v_i - u_m)}{b(v_i - u_m)} \prod_{l>i} w(v_i - v_l) \prod_{l \neq i} \left(-\frac{w(v_l - v_i)}{b(v_l - v_i)}\right) \prod_{l=1}^m b(u_l - v_i) \\ &= -\frac{c(v_i - u_m)}{b(v_i - u_m)} \prod_{l<i} \frac{1}{b(v_i - v_l)} \prod_{l>i} \frac{-1}{b(v_l - v_i)} \prod_{l=1}^m b(u_l - v_i). \end{aligned}$$

Man mache sich klar, daß ausgehend von der Darstellung nach Punkt 1 nur die ab Punkt 2 angegebenen Schritte einen Beitrag zu  $\tilde{\Lambda}^{(i)}$  liefern!  $\square$

**Lemma 25 (Funktionalgleichung für  $\tilde{g}$ ).**

Mit  $\vec{v}' = \vec{v} + \xi \vec{e}_i$  gilt

$$\tilde{\Lambda}_A^{(i)}(\vec{u}|\vec{v}')\tilde{g}(\vec{u}|\vec{v}') = -\tilde{\Lambda}_D^{(i)}(\vec{u}|\vec{v})\tilde{g}(\vec{u}|\vec{v}).$$

*Beweis.* Einsetzen ergibt

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda}_A^{(i)}(\vec{u}|\vec{v}')\tilde{g}(\vec{u}|\vec{v}') &= -\frac{c(u'_m - v'_i)}{b(u'_m - v'_i)} \prod_{l < i} \frac{1}{b(v'_i - v_l)} \prod_{l > i} \frac{-1}{b(v_l - v'_i)} \prod_{l=1}^m \psi(u_l - v'_i) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k \psi(u_l - v_j) \\ &\quad \prod_{l < i} \tilde{\tau}(v_l - v'_i) \prod_{l > i} \tilde{\tau}(v'_i - v_l) \prod_{\substack{1 \leq l < j \leq k \\ l, j \neq i}} \tilde{\tau}(v_l - v_j) \\ &= -\frac{c(u_m - v_i)}{b(u_m - v_i)} \prod_{l < i} \frac{\tilde{\tau}(v_l - v'_i)}{b(v'_i - v_l)} \prod_{l > i} \frac{-\tilde{\tau}(v'_i - v_l)}{b(v_l - v'_i)} \prod_{l=1}^m \psi(u_l - v'_i) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k \psi(u_l - v_j) \prod_{\substack{1 \leq l < j \leq k \\ l, j \neq i}} \tilde{\tau}(v_l - v_j). \end{aligned}$$

Nach (5.27) gilt  $\frac{\tilde{\tau}(v_l - v'_i)}{v'_i - v_l} = \frac{\tilde{\tau}(v_l - v_i)}{b(v_i - v_l)}$  ( $x = v_l - v_i$ ),  $\frac{\tilde{\tau}(v'_i - v_l)}{v_l - v'_i} = \frac{\tilde{\tau}(v_i - v_l)}{b(v_i - v_l)}$  ( $x = v'_i - v_l$ ) und  $\psi(u_l - v'_i) = b(u_l - v_i)\psi(u_l - v_i)$ . Verwendet man außerdem noch die Beziehung  $-\frac{c(u_m - v_i)}{b(u_m - v_i)} = \frac{c(v_i - u_m)}{b(v_i - u_m)}$  (siehe Lemma 45), so folgt

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda}_A^{(i)}(\vec{u}|\vec{v}')\tilde{g}(\vec{u}|\vec{v}') &= \frac{c(v_i - u_m)}{b(v_i - u_m)} \prod_{l < i} \frac{\tilde{\tau}(v_l - v_i)}{b(v_i - v_l)} \prod_{l > i} \frac{-\tilde{\tau}(v_i - v_l)}{b(v_l - v_i)} \\ &\quad \prod_{l=1}^m (b(u_l - v_i)\psi(u_l - v_i)) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k \psi(u_l - v_j) \prod_{\substack{1 \leq l < j \leq k \\ l, j \neq i}} \tilde{\tau}(v_l - v_j) \\ &= \frac{c(v_i - u_m)}{b(v_i - u_m)} \prod_{l < i} \frac{1}{b(v_i - v_l)} \prod_{l > i} \frac{-1}{b(v_l - v_i)} \prod_{l=1}^m b(u_l - v_i) \prod_{j=1}^k \psi(u_l - v_j) \prod_{1 \leq l < j \leq k} \tilde{\tau}(v_l - v_j) \\ &= -\tilde{\Lambda}_D^{(i)}(\vec{u}|\vec{v})\tilde{g}(\vec{u}|\vec{v}). \end{aligned}$$

□

**Satz 26.** Mit  $\vec{x}' = \vec{x} + \xi \vec{e}_n$  gilt die Identität

$$\begin{aligned} A^{*Q}(\vec{x}|n)f^{1 \cdots n}(\vec{x}) &= f^{1 \cdots n}(\vec{x}') + \sum_{\vec{u}} \sum_{i=1}^m \Lambda_A^{(i)}(\vec{x}|\vec{u}) B_{\beta_i}^Q(\vec{x}|n) \\ &\quad B_{\beta_m}(\vec{x}|u_m) \cdots \widehat{B_{\beta_i}(\vec{x}|u_i)} \cdots B_{\beta_1}(\vec{x}|u_1) \Omega^{1 \cdots n} \eta(\vec{x}|\vec{u}) \left[ \tilde{f}^{1 \cdots m i}(u_1, \dots, u_m, u_i) \right]^{\beta_1 \cdots \beta_m \beta_i}, \\ [D^{*Q}(\vec{x}|n)]_{\alpha}^{\alpha} f^{1 \cdots n}(\vec{x}) &= \sum_{\vec{u}} \sum_{i=1}^m \Lambda_D^{(i)}(\vec{x}|\vec{u}) B_{\beta_i}^Q(\vec{x}|n) B_{\beta_m}(\vec{x}|u_m) \cdots \widehat{B_{\beta_i}(\vec{x}|u_i)} \cdots B_{\beta_1}(\vec{x}|u_1) \\ &\quad \Omega^{1 \cdots n} \eta(\vec{x}|\vec{u}) \left[ \tilde{Q}(u_1, \dots, u_m, u_i|i) \tilde{f}^{1 \cdots m i}(u_1, \dots, u_m, u_i) \right]^{\beta_1 \cdots \beta_m \beta_i}, \end{aligned}$$

wobei

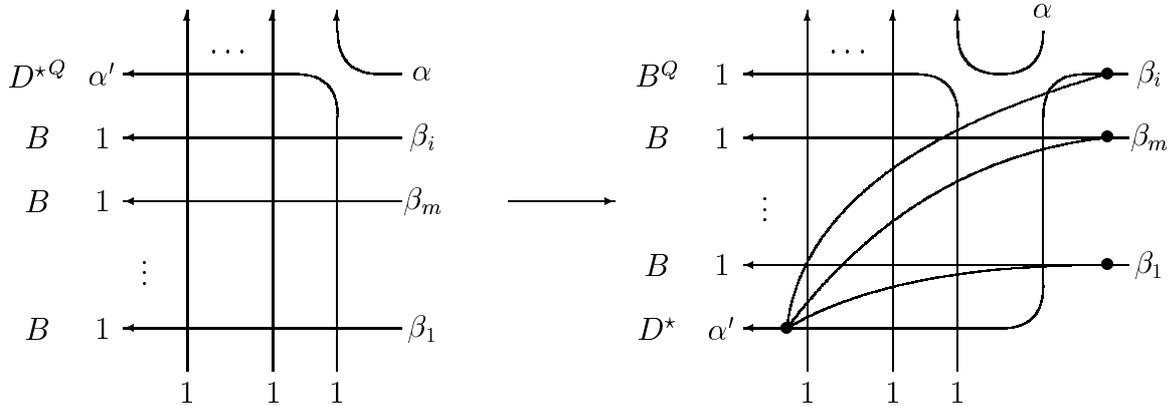
$$\begin{aligned} \Lambda_A^{(i)}(\vec{x}|\vec{u}) &= -\frac{c(x'_n - u_i)}{b(x'_n - u_i)} \prod_{l \neq i} \frac{1}{b(u_i - u_l)}, \\ \Lambda_D^{(i)}(\vec{x}|\vec{u}) &= -\frac{c(u_i - x_n)}{b(u_i - x_n)} \prod_{l \neq i} \frac{1}{b(u_l - u_i)} \prod_{l=1}^n b(x_l - u_i). \end{aligned}$$

*Beweis.* Die Diskussion der gewünschten Anteile ist völlig identisch zu der in Satz 24, da die Vertauschungsrelationen von  $A^Q$  und  $\tilde{A}^Q$  im Prinzip gleich sind (ebenso für  $A$  und  $\tilde{A}$ ), die Funktion  $\psi$  unverändert geblieben ist und  $D^{\star Q \alpha'}(\vec{x}|n)\Omega = 0$  (wegen  $b(x_n - x_n) = 0$ ). Die Diskussion der unerwünschten Anteile ist hier jedoch etwas schwieriger, da die modifizierte Monodromiematrix höherdimensional ist als im reduzierten Fall. Wir führen die Diskussion für  $D^{\star Q \alpha'}(\vec{x}|n)$  durch und summieren erst anschließend über die Diagonalelemente.

Die unerwünschten Anteile lassen sich wie folgt bestimmen<sup>6</sup>:

1. Vertausche  $B_{\beta_i}(\vec{x}|u_i)$  an die Stelle rechts von  $A^Q$  bzw.  $D^{\star Q}$ . Die entstehenden  $S$ -Matrizen können durch die  $S$ -Symmetrie von  $g$  (bzw.  $\tilde{f}$ ) absorbiert werden. Das ändert die Reihenfolge der Argumente in  $\tilde{f}$ .
2. Um das  $Q$  auf das  $B_{\beta_i}(\vec{x}|u_i)$  abzuwälzen, vertausche jetzt „unerwünscht“. Dabei entsteht der Faktor  $-\frac{c(x'_n - u_i)}{b(x'_n - u_i)}$  (für  $A$ ) bzw.  $-\frac{c(u_i - x_n)}{b(u_i - x_n)}$  und eine Fermionlinie (für  $D$ ).
3. Vertausche die neu entstehenden Operatoren „gewünscht“ durch alle verbleibenden  $B$ . Dabei entsteht der Faktor  $\prod_{l \neq i} \frac{1}{b(u_i - u_l)}$  (für  $A$ ) bzw.  $\prod_{l \neq i} \frac{1}{b(u_l - u_i)}$  und je eine  $S$ -Matrix sowie Fermionenlinie (für  $D$ ).
4. Die Eigenwertgleichungen aus Lemma 22 sorgen für die zusätzlichen Faktoren 1 (für  $A$ ) bzw.  $\prod_{l=1}^n b(x_l - u_i)$  und ein Kroneckerdelta sowie eine Fermionenlinie (für  $D$ ).

In der folgenden Abbildung ist zu sehen, wie es sich mit den  $S$ -Matrizen und Fermionenlinien verhält, die bei den ungewünschten Vertauschungen von  $D^{\star}$  entstehen.



Nach der Eigenwertgleichung für  $D^{\star}$  und  $\Omega$  ist es möglich, die untere Linie über die Einsen hinüberzuziehen, wobei eine geschlossene Fermionenlinie bei  $\alpha'$  entsteht, d.h. eine Schleife von  $\alpha'$  zu  $\alpha'$ . Wegen der Fermionerhaltung können die Endpunkte von rechts über die  $S$ -Matrizen hinübergezogen werden, wobei die Schleife sich auflöst zugunsten einer Verbindung zum anderen Ende der Monodromiematrix. Bei der Summation entsteht daher offensichtlich der reduzierte Shiftoperator. Faßt man alle Faktoren zusammen, ergeben sich sofort die oben angegebenen Formeln.  $\square$

<sup>6</sup>Wie in Satz 24 muß man sich natürlich erst davon überzeugen, daß keine anderen Terme auftreten können.



sieht man, daß man  $\tilde{S}$  durch die  $\tilde{B}$ s durchziehen kann, wobei die Variablen vertauschen. Wegen  $a(\theta) = 1$  gilt

$$\begin{array}{ccccccc} & & \nearrow & & \nwarrow & & \\ & & & & & & \\ \uparrow & \cdots & \uparrow & & \uparrow & \cdots & \uparrow \\ 2 & & 2 & & 2 & & 2 \end{array} = \begin{array}{cccc} \uparrow & \cdots & \uparrow & \uparrow \\ 2 & & 2 & 2 \end{array} \begin{array}{cccc} \uparrow & \cdots & \uparrow & \uparrow \\ 2 & & 2 & 2 \end{array}$$

also

$$\tilde{S}_{ij}(u_i - u_j)\tilde{\Omega}^{\cdots ij\cdots} = \tilde{\Omega}^{\cdots ij\cdots}.$$

Nutzt man noch die Symmetrie der Funktion  $\tilde{g}$  in den Variablen  $u_1, \dots, u_m$  aus, folgt die Behauptung.

2.  $\tilde{f}^{1\cdots m}$  ist  $\tilde{Q}$ -periodisch:

Dieser Beweis ist nach den geleisteten Vorarbeiten ziemlich trivial. Nach Lemma 20 reicht es, für  $i = m$  zu zeigen, daß  $\tilde{f}^{1\cdots m}$   $\tilde{Q}$ -periodisch ist. Nach Bemerkung 1 ist also zu überprüfen, ob die Gleichung

$$\text{tr}_a \tilde{T}_{1\cdots m, a}^{\star Q}(\vec{u}|m) \tilde{f}(\vec{u}) = \left[ \tilde{A}^{\star Q}(\vec{u}|m) + \tilde{D}^{\star Q}(\vec{u}|m) \right] \tilde{f}^{1\cdots m}(\vec{u}) = \tilde{f}^{1\cdots m}(\vec{u}')$$

erfüllt ist. Nach Satz 24 gilt

$$\begin{aligned} \text{tr}_a \tilde{T}_{1\cdots m, a}^{\star Q}(\vec{u}|m) \tilde{f}(\vec{u}) &= \tilde{f}^{1\cdots m}(\vec{u}') \\ &+ \sum_{\vec{v}} \sum_{i=1}^k \left( \tilde{\Lambda}_A^{(i)}(\vec{u}|\vec{v}) + \tilde{\Lambda}_D^{(i)}(\vec{u}|\vec{v}) \right) \tilde{B}^Q(\vec{u}|m) \tilde{B}(\vec{u}|v_k) \cdots \widehat{\tilde{B}(\vec{u}|v_i)} \cdots \tilde{B}(\vec{u}|v_1) \tilde{\Omega} \tilde{g}(\vec{u}|\vec{v}). \end{aligned}$$

Vertauscht man die Summen und führt die Umsummation  $\vec{v} \rightarrow \vec{v}' = \vec{v} + \xi \vec{e}_i$  für den ersten Teil der Klammer durch, so fallen nach Lemma 25 die unerwünschten Beiträge weg. □

**Theorem 29.** *Ist  $\tilde{f}^{1\cdots m}$   $\tilde{S}$ -symmetrisch und  $\tilde{Q}$ -periodisch, so ist auch der Bethe Ansatzvektor  $f^{1\cdots n}$  erster Stufe  $S$ -symmetrisch und  $Q$ -periodisch.*

*Beweis.*

1.  $S$ -Symmetrie:

Der Beweis verläuft völlig analog zu dem in Theorem 28.

2.  $Q$ -Periodizität:

Wie schon im vorangegangenen Theorem reicht es, für  $i = n$  zu zeigen, daß  $f^{1\cdots n}$   $Q$ -periodisch ist. Dies ist gleichbedeutend mit

$$\text{tr}_a T_{1\cdots n, a}^{\star Q}(\vec{x}|n) f^{1\cdots n}(\vec{x}) = [A^{\star Q}(\vec{x}|n) + [D^{\star Q}]_{\alpha}^{\alpha}(\vec{x}|n)] f^{1\cdots n}(\vec{x}) = f^{1\cdots n}(\vec{x}'),$$

wobei  $\vec{x}' = \vec{x} + \xi \vec{e}_n$ . Nach Satz 26 gilt jedoch

$$\begin{aligned} tr_a T_{1 \dots n, a}^{*Q}(\vec{x}|n) f(\vec{x}) &= f^{1 \dots n}(\vec{x}') + \sum_{\vec{u}} \sum_{i=1}^m B_{\beta_i}^Q(\vec{x}|n) \times \\ &\times B_{\beta_m}(\vec{x}|u_m) \cdots \widehat{B_{\beta_i}(\vec{x}|u_i)} \cdots B_{\beta_1}(\vec{x}|u_1) \Omega^{1 \dots n} \eta(\vec{x}|\vec{u}) \times \\ &\times \left( \Lambda_A^{(i)}(\vec{x}|\vec{u}) \left[ \tilde{f}^{1 \dots m i}(u_1, \dots, u_m, u_i) \right]^{\beta_1 \dots \beta_m \beta_i} \right. \\ &\left. + \Lambda_D^{(i)}(\vec{x}|\vec{u}) \left[ \tilde{Q}(u_1, \dots, u_m, u_i|i) \tilde{f}^{1 \dots m i}(u_1, \dots, u_m, u_i) \right]^{\beta_1 \dots \beta_m \beta_i} \right). \end{aligned}$$

Da nach Voraussetzung  $\tilde{f}$   $S$ -symmetrisch und  $Q$ -periodisch ist, gilt

$$\left[ \tilde{Q}(u_1, \dots, u_m, u_i|i) \tilde{f}^{1 \dots m i}(u_1, \dots, u_m, u_i) \right]^{\beta_1 \dots \beta_m \beta_i} = \left[ \tilde{f}^{1 \dots m i}(u_1, \dots, u_m, u_i') \right]^{\beta_1 \dots \beta_m \beta_i}$$

mit  $u_i' = u_i + \xi$ . Nach Vertauschung der Summen und Umsummation  $\vec{u} \rightarrow \vec{u}' = \vec{u} + \xi \vec{e}_i$  für den ersten Teil der Klammer, kann man daher  $\left[ \tilde{f}^{1 \dots m i}(u_1, \dots, u_m, u_i') \right]^{\beta_1 \dots \beta_m \beta_i}$  ausklammern. Wegen Lemma 27 fallen die unerwünschten Beiträge dann völlig weg.  $\square$

## 5.4 Höchste-Gewicht-Eigenschaft der Bethe Ansatzvektoren

Bevor wir zu der Hauptaussage dieses Abschnitts kommen können, benötigen wir folgendes

**Lemma 30 (Eigenwertgleichungen für die Generatoren der  $spl(2, 1)$ ).**

Die Generatoren der  $spl(2, 1)$  genügen den Eigenwertgleichungen

$$\begin{aligned} M_\alpha^{\alpha'} \Omega &= 0 & (\alpha' > 1) & & \tilde{M}_2^3 \tilde{\Omega} &= 0 \\ W_\alpha \Omega &= \delta_{1\alpha} n \Omega & & & \tilde{W}_\alpha \tilde{\Omega} &= \delta_{2\alpha} m \tilde{\Omega}. \end{aligned} \quad (5.33)$$

*Beweis.* Die Gleichungen folgen direkt aus der Darstellung (5.19).  $\square$

Daran anschließend haben wir direkt das

**Lemma 31.** Anwendung des reduzierten Generators  $\tilde{M}_2^3$  auf den Bethe Ansatzvektor der zweiten Stufe ergibt die Darstellung

$$\begin{aligned} &\tilde{M}_2^3 \tilde{f}^{1 \dots m}(\vec{u}) \\ &= \sum_{\vec{v}} \sum_{i=1}^k \left( \tilde{\Xi}_A^{(i)}(\vec{u}|\vec{v}) + \tilde{\Xi}_D^{(i)}(\vec{u}|\vec{v}) \right) \tilde{B}(\vec{u}|v_k) \cdots \widehat{\tilde{B}(\vec{u}|v_i)} \cdots \tilde{B}(\vec{u}|v_1) \tilde{\Omega} \tilde{g}(\vec{u}|\vec{v}), \end{aligned} \quad (5.34)$$

wobei für die Hilfsfunktionen gilt

$$\begin{aligned} \tilde{\Xi}_A^{(i)}(\vec{u}|\vec{v}) &= \prod_{l < i} \frac{1}{b(v_i - v_l)} \prod_{l > i} \frac{-1}{b(v_l - v_i)} \\ \tilde{\Xi}_D^{(i)}(\vec{u}|\vec{v}) &= - \prod_{l < i} \frac{1}{b(v_i - v_l)} \prod_{l > i} \frac{-1}{b(v_l - v_i)} \prod_{l=1}^m b(u_l - v_i). \end{aligned}$$

*Beweis.* Aus (5.21) erhalten wir die Vertauschungsrelation

$$\tilde{M}_2^3 \tilde{B}(v) = -\tilde{B}(v) \tilde{M}_2^3 + \tilde{A}(v) + \tilde{D}^*(v).$$

Mit  $\tilde{M}_2^3 \tilde{\Omega} = 0$  aus Lemma 30 folgt

$$\begin{aligned} \tilde{M}_2^3 \tilde{B}(\vec{u}|v_k) \cdots \tilde{B}(\vec{u}|v_1) \tilde{\Omega} \tilde{g}(\vec{u}|\vec{v}) \\ = \sum_{i=1}^k (-1)^{k-i} \tilde{B}(\vec{u}|v_k) \cdots [\tilde{A}(v_i) + \tilde{D}^*(v_i)] \cdots \tilde{B}(\vec{u}|v_1) \tilde{\Omega} \tilde{g}(\vec{u}|\vec{v}). \end{aligned}$$

Die Vertauschungsrelationen (5.13) und (5.17), sowie die Eigenwertgleichungen

$$\tilde{A}(v) \tilde{\Omega} = \tilde{\Omega} \quad \text{und} \quad \tilde{D}^*(v) \tilde{\Omega} = - \prod_{j=1}^m b(u_j - v) \tilde{\Omega}$$

ergeben die gewünschte Struktur.

Die  $\tilde{\Xi}^{(i)}$  lassen sich folgendermaßen bestimmen: Vertausche zuerst  $\tilde{B}(\vec{u}|v_i)$  nach (5.9) direkt hinter  $\tilde{M}_2^3$  und vertausche es mit diesem. Dabei entstehen der Faktor  $\prod_{l>i} \frac{w(u_i - u_l)}{a(u_i - u_l)}$  und der Operator  $\tilde{A}(\vec{u}|v_i) + \tilde{D}^*(\vec{u}|v_i)$ . Anschließend darf man, um Beiträge zu  $\tilde{\Xi}^{(i)}$  zu erhalten, nur noch „gewünscht“ vertauschen, wobei wie in Satz 24 die zusätzlichen Faktoren  $\prod_{l \neq i} \frac{a(v_i - v_l)}{b(v_i - v_l)}$  (A-Teil) bzw.  $\prod_{l \neq i} \frac{-w(v_l - v_i)}{b(v_l - v_i)}$  (D-Teil) erzeugt werden. Daraus folgt mit den oben genannten Eigenwertgleichungen,  $w(x)w(-x) = 1$  (Unitarität) und  $\frac{w(\theta)}{b(\theta)} = -\frac{1}{b(-\theta)}$  (Lemma 45) die Behauptung. Im Prinzip ist das der gleiche Beweis wie in Satz 24, nur daß diesmal der Schritt der „ungewünscht“-Vertauschung ein anderer war.  $\square$

Daß die Bethe Ansatzvektoren zweiter Stufe im reduzierten Raum so etwas wie eine Höchste-Gewicht-Eigenschaft besitzen, besagt das

**Lemma 32.** Für Bethe Ansatzvektoren  $\tilde{f}^{1 \cdots m}(\vec{u})$  der zweiten Stufe gilt

$$\tilde{M}_2^3 \tilde{f}^{1 \cdots m}(\vec{u}) = 0.$$

*Beweis.* Mit  $\vec{v}' = \vec{v} + \vec{e}_i$  folgt nach Lemma 31 unter Ausnutzung der definierenden Relationen (5.27) wegen

$$\begin{aligned} \tilde{\Xi}_A^{(i)}(\vec{u}|\vec{v}') \tilde{g}(\vec{u}|\vec{v}') &= \prod_{l<i} \frac{1}{b(v_i - v_l)} \prod_{l>i} \frac{-1}{b(v_l - v_i)} \prod_{l=1}^m \psi(u_l - v'_i) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k \psi(u_l - v_j) \\ &\quad \prod_{l<i} \tilde{\tau}(v_l - v'_i) \prod_{l>i} \tilde{\tau}(v'_i - v_l) \prod_{\substack{1 \leq l < j \leq k \\ l, j \neq i}} \tilde{\tau}(v_l - v_j) \\ &= \prod_{l<i} \frac{\tilde{\tau}(v_l - v'_i)}{b(v_i - v_l)} \prod_{l>i} \frac{-\tilde{\tau}(v'_i - v_l)}{b(v_l - v_i)} \prod_{l=1}^m \left( b(u_l - v_i) \psi(u_l - v_i) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k \psi(u_l - v_j) \right) \prod_{\substack{1 \leq l < j \leq k \\ l, j \neq i}} \tilde{\tau}(v_l - v_j) \\ &= -\tilde{\Xi}_D^{(i)}(\vec{u}|\vec{v}) \tilde{g}(\vec{u}|\vec{v}) \end{aligned}$$

nach Umsummation  $\vec{v} \rightarrow \vec{v}'$  des ersten Summanden in (5.34) sofort die Behauptung. Vergleiche dazu Lemma 25.  $\square$

Die Verallgemeinerung des letzten Lemmas auf Bethe Ansatzvektoren erster Stufe folgt unmittelbar.

**Satz 33 (Höchste-Gewicht-Eigenschaft der Bethe Ansatzvektoren).**

Die Betheansatzvektoren  $f(\vec{x})$  erster Stufe sind highest-weight-Vektoren, d.h. für  $\alpha' > \alpha$  gilt  $M_{\alpha'}^{\alpha} f(\vec{x}) = 0$ .

*Beweis.*

1. Fall  $\alpha = 1$ ,  $\alpha' > 1$ :

Die Vertauschungsrelationen (5.21) lauten für  $\alpha = 1$ ,  $\alpha' > 1$ ,  $\beta > 1$  und  $\beta' = 1$ :

$$M_1^{\alpha'} B_{\beta}(\vec{x}|u) = \sigma_{\alpha'\beta} B_{\beta}(\vec{x}|u) M_1^{\alpha'} + \delta_{\beta}^{\alpha'} A(\vec{x}|u) - \sigma_{\alpha'\beta} D^{\alpha'}(\vec{x}|u).$$

Außerdem gilt  $M_1^{\alpha'} \Omega = 0$  wegen Lemma 30. Wir gehen wie üblich vor, tauschen erst  $B_{\beta_i}(\vec{x}|u_i)$  nach vorne, dann einmal „ungewünscht“ und anschließend nur noch „gewünscht“. Dabei ergibt sich

$$\begin{aligned} M_1^{\alpha'} f^{1 \cdots n}(\vec{x}) &= \sum_{\vec{u}} \sum_{i=1}^m \delta_{\beta_i}^{\alpha'} B_{\beta_m}(u_m) \cdots \widehat{B_{\beta_i}(u_i)} \cdots B_{\beta_1}(u_1) \\ &\quad \left( \prod_{j \neq i} \frac{1}{b(u_i - u_j)} \Omega \eta(\vec{x}|\vec{u}) [\tilde{f}(u_1, \dots, u_m, u_i)]^{\beta_1 \cdots \beta_m \beta_i} \right. \\ &\quad \left. + \prod_{j \neq i} \frac{1}{b(u_j - u_i)} \prod_{j=1}^n b(x_j - u_i) \Omega \eta(\vec{x}|\vec{u}) \underbrace{[\tilde{Q}(u_1, \dots, u_m, u_i|i) \tilde{f}(u_1, \dots, u_m, u_i)]^{\beta_1 \cdots \beta_m \beta_i}}_{\tilde{f}(u_1, \dots, u_m, u_i)} \right). \end{aligned}$$

Ein kritischer Vergleich mit Theorem 29 zeigt, daß dies im wesentlichen nichts anderes ist als dort und daß sich die Summanden durch die Summierung über  $\vec{u}$  wegheben sollten. In der Tat gilt mit  $\vec{u}' = \vec{u} + \xi \vec{e}_i$

$$\begin{aligned} \prod_{j \neq i} \frac{1}{b(u'_i - u_j)} \eta(\vec{x}|\vec{u}') &= \prod_{j \neq i} \frac{1}{b(u'_i - u_j)} \prod_{l=1}^n \left( \psi(x_l - u'_i) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m \psi(x_l - u_j) \right) \times \\ &\quad \times \prod_{l < i} \tau(u_l - u'_i) \prod_{l > i} \tau(u'_i - u_l) \prod_{\substack{1 \leq l < j \leq m \\ l, j \neq i}} \tau(u_l - u_j) \\ &= \prod_{l < i} \frac{\tau(u_l - u'_i)}{b(u'_i - u_l)} \prod_{l > i} \frac{\tau(u'_i - u_l)}{b(u'_i - u_l)} \prod_{l=1}^n \left( b(x_l - u_i) \psi(x_l - u_i) \right) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m \psi(x_l - u_j) \prod_{\substack{1 \leq l < j \leq m \\ l, j \neq i}} \tau(u_l - u_j), \end{aligned}$$

wobei schon  $b(x_l - u_i) \psi(x_l - u_i) = \psi(x_l - u'_i)$  (Gleichung (5.26)) ausgenutzt worden ist. Mit den anderen definierenden Relationen  $\frac{\tau(u_l - u'_i)}{b(u'_i - u_l)} = \frac{\tau(u_l - u_i)}{b(u_l - u_i)}$  ( $x = u_l - u_i$ ) und  $\frac{\tau(u'_i - u_l)}{b(u'_i - u_l)} = \frac{\tau(u_i - u_l)}{b(u_l - u_i)}$  ( $x = u'_i - u_l$ ) aus (5.26) folgt dann weiter

$$\begin{aligned} \prod_{j \neq i} \frac{1}{b(u'_i - u_j)} \eta(\vec{x}|\vec{u}') &= \prod_{l < i} \frac{\tau(u_l - u_i)}{b(u_l - u_i)} \prod_{l > i} \frac{\tau(u_i - u_l)}{b(u_l - u_i)} \prod_{l=1}^n \left( b(x_l - u_i) \psi(x_l - u_i) \right) \times \\ &\quad \times \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m \psi(x_l - u_j) \prod_{\substack{1 \leq l < j \leq m \\ l, j \neq i}} \tau(u_l - u_j) = \prod_{j \neq i} \frac{1}{b(u_j - u_i)} \prod_{j=1}^n b(x_j - u_i) \eta(\vec{x}|\vec{u}). \end{aligned}$$

2. Fall  $\alpha = 2, \alpha' = 3$ :

Die Vertauschungsrelationen (5.21) lauten für  $\alpha = 2, \alpha' = 3, \beta > 1$  und  $\beta' = 1$ :

$$M_2^3 B_\beta(\vec{x}|u) = \sigma_{3\beta} B_\beta(\vec{x}|u) M_2^3 + \delta_\beta^3 B_2(\vec{x}|u).$$

Danach erhalten wir wegen  $M_2^3 \Omega = 0$  und (5.19)

$$\begin{aligned} M_2^3 f^{1 \cdots n}(\vec{x}) &= \sum_{j=1}^m \sigma_{3\beta_m} \cdots \sigma_{3\beta_{j+1}} B_{\beta_m}(u_m) \cdots \delta_{\beta_j}^3 B_2(u_j) \cdots B_{\beta_1}(u_1) \Omega[g(\vec{u})]^{\beta_1 \cdots \beta_m} \\ &= B_{\beta_m}(u_m) \cdots B_{\beta_1}(u_1) \Omega[\tilde{M}_2^3 g(\vec{u})]^{\beta_1 \cdots \beta_m}. \end{aligned}$$

Nach Lemma 32 verschwindet dies. □

Den letzten Schritt zu einer vollständigen Klassifikation der Lösungen ist gegeben durch

**Satz 34.** *Die Betheansatzvektoren erster Stufe sind Eigenvektoren zu den Gewichtsoperatoren mit*

$$W_\alpha f(\vec{x}) = w_\alpha f(\vec{x}) = \begin{cases} (n-m)f(\vec{x}) & , \alpha = 1 \\ (m-k)f(\vec{x}) & , \alpha = 2 \\ k f(\vec{x}) & , \alpha = 3. \end{cases}$$

*Beweis.*

1. Fall  $\alpha = 1$ :

Die Vertauschungsrelation (5.21) lauten für  $\alpha = \alpha' = \beta' = 1$  und  $\beta > 1$ :

$$W_1 B_\beta(\vec{x}|u) = B_\beta(\vec{x}|u) W_1 - B_\beta(\vec{x}|u).$$

Daraus ergibt sich mit Lemma 30 sofort

$$\begin{aligned} W_1 f^{1 \cdots n}(\vec{x}) &= \sum_{\vec{u}} B_{\beta_m}(u_m) \cdots B_{\beta_1}(u_1) (W_1 - m) \Omega^{1 \cdots n} [g^{1 \cdots m}(\vec{x}|\vec{u})]^{\beta_1 \cdots \beta_m} = (n-m) f^{1 \cdots n}(\vec{x}) \end{aligned}$$

und damit die Behauptung.

2. Fall  $\alpha > 1$ :

Die Vertauschungsrelationen (5.21) lauten für  $\alpha = \alpha' > 1, \beta > 1$  und  $\beta' = 1$ :

$$W_\alpha B_\beta(\vec{x}|u) = B_\beta(\vec{x}|u) W_\alpha + \delta_\alpha^\beta B_\beta(\vec{x}|u).$$

Damit erhalten wir mit Lemma 30 und (5.23)

$$\begin{aligned} W_\alpha f^{1 \cdots n}(\vec{x}) &= \sum_{\vec{u}} B_{\beta_m}(u_m) \cdots B_{\beta_1}(u_1) (W_\alpha + \sum_{j=1}^m \delta_\alpha^{\beta_j}) \Omega^{1 \cdots n} [g^{1 \cdots m}(\vec{x}|\vec{u})]^{\beta_1 \cdots \alpha \cdots \beta_m} \\ &= \sum_{\vec{u}} B_{\beta_m}(u_m) \cdots B_{\beta_1}(u_1) \Omega^{1 \cdots n} \eta(\vec{x}|\vec{u}) [\tilde{W}_\alpha \tilde{f}^{1 \cdots m}(\vec{u})]^{\beta_1 \cdots \beta_m}. \end{aligned}$$

Das Problem ist also auf die zweite Stufe reduziert worden, die im folgenden genauer untersucht werden wird.

(a) Fall  $\alpha = 2$ :

Analog zum Fall  $\alpha = 1$  folgt

$$\tilde{W}_2 \tilde{f}^{1 \cdots m}(\vec{u}) = (m - k) \tilde{f}^{1 \cdots m}(\vec{u}).$$

(b) Fall  $\alpha = 3$ :

Die Vertauschungsrelationen (5.21) lauten für  $\alpha = \alpha' = \beta = 3$  und  $\beta' = 2$ :

$$\tilde{W}_3 \tilde{B}(\vec{u}|v) = \tilde{B}(\vec{u}|v) \tilde{W}_3 + \tilde{B}(\vec{u}|v).$$

Daraus folgt mit Lemma 30

$$\tilde{W}_3 \tilde{f}^{1 \cdots m}(\vec{u}) = \sum_{\vec{v}} \tilde{B}(\vec{u}|v_k) \cdots \tilde{B}(\vec{u}|v_1) (\tilde{W}_3 + k) \tilde{\Omega}^{1 \cdots m} \tilde{g}(\vec{u}|\vec{v}) = k \tilde{f}^{1 \cdots m}(\vec{u}).$$

Damit ist der Beweis vollendet.

□

# Anhang A

## LSZ-Reduktion für skalare Felder

In diesem Abschnitt sollen die Grundlagen dargestellt werden, die zu den Crossing-Relationen von  $S$ -Matrizen und Formfaktoren führen. Das Vorgehen geht auf Lehmann, Symanzik und Zimmermann (siehe [46] und [47]) zurück, daher der Name. Wir wollen annehmen, daß die  $\phi_\epsilon$  komplexe skalare Felder sind und daß diese Felder asymptotisch frei sind, d.h. es existieren freie Felder  $\phi_\epsilon^{in}(x) \approx \phi_\epsilon(x)$  für  $x^0 \rightarrow -\infty$  und  $\phi_\epsilon^{out}(x) \approx \phi_\epsilon(x)$  für  $x^0 \rightarrow \infty$ . Der Limes ist dabei ein schwacher Limes, d.h. nicht die Operatoren selbst konvergieren, sondern nur alle Matrixelemente<sup>1</sup>.

Freie skalare Felder lassen sich in Lösungen der Klein-Gordon-Gleichung  $\mathcal{K}\psi := (\square + m^2)\psi = 0$  entwickeln. Diese sind bekanntlich

$$f_{\vec{k}}(x) = \frac{1}{(2\pi)^3 2\omega_{\vec{k}}} e^{-ikx} \quad \text{mit} \quad \omega_k = k_0 = \sqrt{m^2 + \vec{k}^2}.$$

Ebenso ist  $f_{\vec{k}}^*(x)$  eine Lösung. Dies führt zu der Entwicklung<sup>2</sup>

$$\phi_\epsilon^{in/out}(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_{\vec{k}}} \left( e^{-ikx} a_\epsilon^{in/out}(\vec{k}) + e^{+ikx} a_{\bar{\epsilon}}^{in/out}(\vec{k})^\dagger \right).$$

Unter Ausnutzung von Orthogonalitätsrelationen des Funktionensystems  $\{f_{\vec{k}}, f_{\vec{k}}^*\}$  folgen die Umkehrformeln

$$\begin{aligned} a_\epsilon^{in/out}(\vec{k}) &= i \int d^3x e^{+ikx} \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi_\epsilon^{in/out}(x), \\ a_{\bar{\epsilon}}^{in/out}(\vec{k})^\dagger &= -i \int d^3x e^{-ikx} \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi_\epsilon^{in/out}(x). \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Wie üblich ist dabei  $h \overleftrightarrow{\partial}_0 g = h \partial_0 g - (\partial_0 h) g$ . Wegen  $\phi_{\bar{\epsilon}} = \phi_\epsilon^\dagger$  gelten diese Formeln auch, wenn man  $\epsilon$  durch  $\bar{\epsilon}$  ersetzt, wie es auch sein muß, wenn diese Gleichungen einen universellen Sinn haben sollen.

Betrachte nun Matrixelemente  $T := {}^{out}\langle (p_n, \bar{\epsilon}_n), \dots, (p_1, \bar{\epsilon}_1) | \mathcal{O}(x) | (q_1, \nu_1), \dots, (q_m, \nu_m) \rangle^{in}$ . Beachte, daß für die Zustände  $|(q_1, \nu_1), \dots, (q_m, \nu_m)\rangle$  statt  $|(\vec{q}_1, \nu_1), \dots, (\vec{q}_m, \nu_m)\rangle$  geschrieben wird. Diese Schreibweise soll andeuten, daß die Energiekomponenten  $q_i^0$  mit berücksichtigt werden. Es werden sich später Ausdrücke ergeben, die formal als Zustände

<sup>1</sup>Für genaueres siehe [7].

<sup>2</sup>In der Literatur ist es üblich,  $a_{\bar{\epsilon}}^{in}(k)^\dagger = b_\epsilon^{in}(x)^\dagger$  zu setzen.

mit Teilchen mit negativer Energie betrachtet werden können. Sie werden als analytische Fortsetzung zu verstehen sein, da negative Energien unphysikalisch sind.

Das Ziel ist es, Teilchen von der in-Seite auf die out-Seite zu ziehen oder umgekehrt.

$$T = {}^{out}\langle (p_n, \bar{\epsilon}_n), \dots, (p_2, \bar{\epsilon}_2) | \left( a_{\bar{\epsilon}_1}^{out}(\vec{p}_1) \mathcal{O}(x) - \mathcal{O}(x) a_{\bar{\epsilon}_1}^{in}(\vec{p}_1) + \mathcal{O}(x) a_{\bar{\epsilon}_1}^{in}(\vec{p}_1) \right) | (q_1, \nu_1), \dots, (q_m, \nu_m) \rangle^{in}.$$

Im nächsten Schritt werden für die ersten beiden Vernichtungsoperatoren die Darstellungen (A.1) verwendet, um zu

$$T = {}^{out}\langle (p_n, \bar{\epsilon}_n), \dots, (p_2, \bar{\epsilon}_2) | \mathcal{O}(x) a_{\bar{\epsilon}_1}^{in}(\vec{p}_1) | (q_1, \nu_1), \dots, (q_m, \nu_m) \rangle^{in} + i \int d^3 y e^{+ip_1 y} \overleftrightarrow{\partial}_0 {}^{out}\langle (p_n, \bar{\epsilon}_n), \dots, (p_2, \bar{\epsilon}_2) | \left( \phi_{\bar{\epsilon}_1}^{out}(y) \mathcal{O}(x) - \mathcal{O}(x) \phi_{\bar{\epsilon}_1}^{in}(y) \right) | (q_1, \nu_1), \dots, (q_m, \nu_m) \rangle^{in}$$

zu gelangen. Der erste Term, den wir im weiteren  $T'_1$  nennen wollen, heißt nichtzusammenhängender Anteil von  $T$  bezüglich  $p_1$ , da offenbar  $\delta$ -Funktionen auftreten, die  $p_1$  enthalten. Da das ursprüngliche Matrixelement  $T$  nicht von  $y^0$  abhängen kann, ist es uns freigestellt, für den Ausdruck  $\phi_{\bar{\epsilon}_1}^{out}(y) \mathcal{O}(x)$  sehr große Werte von  $y^0$  anzunehmen und für  $\mathcal{O}(x) \phi_{\bar{\epsilon}_1}^{in}(y)$  sehr kleine Werte von  $y^0$ . In diesen Bereichen können jedoch out- und in-Feld beide durch das Feld  $\phi_{\bar{\epsilon}_1}(y)$  beschrieben werden. Fügt man dann noch geeignet einen Zeitordnungsoperator  $\mathcal{T}$  ein und dreht die Wirkungsweise des Operators  $\overleftrightarrow{\partial}_0$  um, so folgt

$$T = T'_1 - i \left( \lim_{y^0 \rightarrow \infty} - \lim_{y^0 \rightarrow -\infty} \right) \int d^3 y {}^{out}\langle (p_n, \bar{\epsilon}_n), \dots, (p_2, \bar{\epsilon}_2) | \mathcal{T} [\mathcal{O}(x) \phi_{\bar{\epsilon}_1}(y)] | (q_1, \nu_1), \dots, (q_m, \nu_m) \rangle^{in} \overleftrightarrow{\partial}_0 e^{+ip_1 y}.$$

Mit  $(\lim_{y^0 \rightarrow \infty} - \lim_{y^0 \rightarrow -\infty}) \int d^3 y = \int dy^0 \partial_0 \int d^3 y = \int d^4 y \partial_0$  und  $\partial_0 (g \overleftrightarrow{\partial}_0 h) = g \partial_0^2 h - (\partial_0^2 g) h$  ergibt sich

$$T = T'_1 - i \int d^4 y {}^{out}\langle (p_n, \bar{\epsilon}_n), \dots, (p_2, \bar{\epsilon}_2) | (\mathcal{T} [\mathcal{O}(x) (\partial_0^2 \phi_{\bar{\epsilon}_1}(y)) e^{+ip_1 y}] - \mathcal{T} [\mathcal{O}(x) \phi_{\bar{\epsilon}_1}(y) \partial_0^2 e^{+ip_1 y}]) | (q_1, \nu_1), \dots, (q_m, \nu_m) \rangle^{in}.$$

Im nächsten Schritt ersetzen wir  $\partial_0^2 e^{+ip_1 y}$  durch  $(\Delta - m^2) e^{+ip_1 y}$ , was möglich ist, da  $e^{+ip_1 y}$  nach Voraussetzung die Klein-Gordon-Gleichung erfüllt. Mit einer anschließenden zweifachen partiellen Integration können wir den Laplaceoperator auf das Feld  $\phi_{\bar{\epsilon}_1}$  abwälzen. Dabei entstehen keine Randterme, wenn  $\phi_{\bar{\epsilon}_1}$  im Unendlichen genügend stark abfällt. In Formeln bedeutet dies

$$T = T'_1 - i \int d^4 y e^{+ip_1 y} {}^{out}\langle (p_n, \bar{\epsilon}_n), \dots, (p_2, \bar{\epsilon}_2) | \mathcal{T} [\mathcal{O}(x) (\partial_0^2 - \Delta + m^2) \phi_{\bar{\epsilon}_1}(y)] | (q_1, \nu_1), \dots, (q_m, \nu_m) \rangle^{in}.$$

Auf analoge Weise ist es möglich, ein Teilchen von der in-Seite auf die out-Seite zu ziehen. Im folgenden Satz wollen wir noch einmal dieses Ergebnis festhalten.

**Satz 35 (LSZ-Reduktionsformeln (out-in)).**

Bringt man beim Matrixelement  ${}^{out}\langle(p_n, \bar{\epsilon}_n), \dots, (p_1, \bar{\epsilon}_1)|\mathcal{O}(x)|(q_1, \nu_1), \dots, (q_m, \nu_m)\rangle^{in}$  das erste Teilchen von der linken auf die rechte Seite, so gilt

$$\begin{aligned} & {}^{out}\langle(p_n, \bar{\epsilon}_n), \dots, (p_1, \bar{\epsilon}_1)|\mathcal{O}(x)|(q_1, \nu_1), \dots, (q_m, \nu_m)\rangle^{in} \\ &= {}^{out}\langle(p_n, \bar{\epsilon}_n), \dots, (p_2, \bar{\epsilon}_2)|\mathcal{O}(x)a_{\bar{\epsilon}_1}^{in}(\vec{p}_1)|(q_1, \nu_1), \dots, (q_m, \nu_m)\rangle^{in} \\ &- i \int d^4y e^{+ip_1y} {}^{out}\langle(p_n, \bar{\epsilon}_n), \dots, (p_2, \bar{\epsilon}_2)|\mathcal{T}[\mathcal{O}(x)\mathcal{K}\phi_{\bar{\epsilon}_1}(y)]|(q_1, \nu_1), \dots, (q_m, \nu_m)\rangle^{in}. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Bringt man hingegen das erste Teilchen von der rechten auf die linke Seite, so gilt

$$\begin{aligned} & {}^{out}\langle(p_n, \bar{\epsilon}_n), \dots, (p_1, \bar{\epsilon}_1)|\mathcal{O}(x)|(q_1, \nu_1), \dots, (q_m, \nu_m)\rangle^{in} \\ &= {}^{out}\langle(p_n, \bar{\epsilon}_n), \dots, (p_1, \bar{\epsilon}_1)|a_{\nu_1}^{out}(\vec{q}_1)^\dagger \mathcal{O}(x)|(q_2, \nu_2), \dots, (q_m, \nu_m)\rangle^{in} \\ &- i \int d^4y e^{-iq_1y} {}^{out}\langle(p_n, \bar{\epsilon}_n), \dots, (p_1, \bar{\epsilon}_1)|\mathcal{T}[\mathcal{O}(x)\mathcal{K}\phi_{\bar{\nu}_1}(y)]|(q_2, \nu_2), \dots, (q_m, \nu_m)\rangle^{in}. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Die gleichen Formeln gelten, wenn man links die in- und rechts die out-Zustände hat und gleichzeitig sowohl die Vorzeichen des Integralanteils umdreht als auch den Zeitordnungsoperator  $\mathcal{T}$  durch den Antizeitordnungsoperator  $\mathcal{T}^*$  ersetzt.

Ähnliche Überlegungen sollen nun für das Matrixelement

$$T := {}^{out}\langle(p_n, \bar{\epsilon}_n), \dots, (p_1, \bar{\epsilon}_1)|\mathcal{O}(x)|(q_1, \nu_1), \dots, (q_m, \nu_m)\rangle^{out}$$

durchgeführt werden. Das Ziel ist diesmal, Teilchen von der rechten Seite auf die linke zu ziehen. Auf den ersten Blick mag dies nicht viel Sinn machen, da dann in-Erzeugungsoperatoren auf out-Vernichtungsoperatoren treffen. Im Spezialfall faktorisierender Streutheorien lassen sich trotzdem wichtige Ergebnisse ableiten.

$$\begin{aligned} T = {}^{out}\langle(p_n, \bar{\epsilon}_n), \dots, (p_1, \bar{\epsilon}_1)| & \left( \mathcal{O}(x)a_{\nu_1}^{out}(\vec{q}_1)^\dagger - a_{\nu_1}^{in}(\vec{q}_1)^\dagger \mathcal{O}(x) \right. \\ & \left. + a_{\nu_1}^{in}(\vec{q}_1)^\dagger \mathcal{O}(x) \right) |(q_2, \nu_2), \dots, (q_m, \nu_m)\rangle^{out}. \end{aligned}$$

Verwendung von (A.1) für die ersten beiden Erzeugungsoperatoren ergibt

$$\begin{aligned} T = {}^{out}\langle(p_n, \bar{\epsilon}_n), \dots, (p_1, \bar{\epsilon}_1)| & a_{\nu_1}^{in}(\vec{q}_1)^\dagger \mathcal{O}(x)|(q_2, \nu_2), \dots, (q_m, \nu_m)\rangle^{out} - i \int d^3y e^{-iq_1y} \overleftrightarrow{\partial}_0 \\ & {}^{out}\langle(p_n, \bar{\epsilon}_n), \dots, (p_1, \bar{\epsilon}_1)| \left( \mathcal{O}(x)\phi_{\bar{\nu}_1}^{out}(y) - \phi_{\bar{\nu}_1}^{in}(y)\mathcal{O}(x) \right) |(q_2, \nu_2), \dots, (q_m, \nu_m)\rangle^{out}. \end{aligned}$$

Der erste Term soll wieder  $T_1'$  genannt werden. Für den Ausdruck  $\mathcal{O}(x)\phi_{\bar{\nu}_1}^{out}(y)$  wählen wir wieder  $y^0 \rightarrow \infty$  und für  $\phi_{\bar{\nu}_1}^{in}(y)\mathcal{O}(x)$  analog  $y^0 \rightarrow -\infty$ . Darstellung durch das Feld  $\phi_{\bar{\nu}_1}(y)$ , Einfügen eines Anti-Zeitordnungsoperator  $\mathcal{T}^*$  und Umdrehen der Wirkungsweise des Operators  $\overleftrightarrow{\partial}_0$  liefert dann

$$\begin{aligned} T &= T_1' + i \left( \lim_{y^0 \rightarrow \infty} - \lim_{y^0 \rightarrow -\infty} \right) \int d^3y \\ & {}^{out}\langle(p_n, \bar{\epsilon}_n), \dots, (p_1, \bar{\epsilon}_1)|\mathcal{T}^* \left[ \mathcal{O}(x)\phi_{\bar{\nu}_1}(y) \right] |(q_2, \nu_2), \dots, (q_m, \nu_m)\rangle^{out} \overleftrightarrow{\partial}_0 e^{-iq_1y} \\ &= T_1' + i \int d^4y {}^{out}\langle(p_n, \bar{\epsilon}_n), \dots, (p_1, \bar{\epsilon}_1)| \left( \mathcal{T}^* \left[ \mathcal{O}(x)(\partial_0^2 \phi_{\bar{\nu}_1}(y))e^{-iq_1y} \right] \right. \\ & \left. - \mathcal{T}^* \left[ \mathcal{O}(x)\phi_{\bar{\nu}_1}(y)\partial_0^2 e^{-iq_1y} \right] \right) |(q_2, \nu_2), \dots, (q_m, \nu_m)\rangle^{out}. \end{aligned}$$

Das Resultat der Verwendung der Klein-Gordon-Gleichung für  $e^{-iq_1 y}$  und Abwälzen des Laplaceoperators auf das Feld ist das

**Lemma 36 (LSZ-Reduktionsformel (out-out)).**

*Matrizelemente eines lokalen Operators mit out-Zuständen erlauben die Entwicklung*

$$\begin{aligned}
& {}^{out}\langle (p_n, \bar{\epsilon}_n), \dots, (p_1, \bar{\epsilon}_1) | \mathcal{O}(x) | (q_1, \nu_1), \dots, (q_m, \nu_m) \rangle^{out} \\
&= {}^{out}\langle (p_n, \bar{\epsilon}_n), \dots, (p_1, \bar{\epsilon}_1) | a_{\nu_1}^{in}(\vec{q}_1)^\dagger \mathcal{O}(x) | (q_2, \nu_2), \dots, (q_m, \nu_m) \rangle^{out} \\
&\quad + i \int d^4 y e^{-iq_1 y} {}^{out}\langle (p_n, \bar{\epsilon}_n), \dots, (p_1, \bar{\epsilon}_1) | \mathcal{T}^* [\mathcal{O}(x) \mathcal{K} \phi_{\bar{\epsilon}_1}(y)] | (q_2, \nu_2), \dots, (q_m, \nu_m) \rangle^{out}.
\end{aligned} \tag{A.4}$$

# Anhang B

## Beweis des verallgemeinerten Wick-Theorems

Es soll hier das verallgemeinerte Wick-Theorem bewiesen werden, das bereits in Abschnitt 2.4.3 vorgestellt worden ist.

### Theorem 37 (Verallgemeinertes Wick-Theorem).

Für die verallgemeinerten Normalprodukte aus Kapitel 2 gelten die Gleichungen<sup>1</sup>

$$Z(\alpha_1) \cdots Z(\alpha_n) = \sum_{\forall \text{Kontr.}} : Z(\alpha_1) \cdots \overbrace{\cdots}^{\text{Kontr.}} \cdots Z(\alpha_n) :.$$

*Beweis.*

(a) In einem ersten Schritt wird induktiv die Gleichung

$$\begin{aligned} : Z(\alpha_1) \cdots Z(\alpha_n) : Z(\alpha_0) &= : Z(\alpha_1) \cdots Z(\alpha_n) Z(\alpha_0) : \\ &+ \sum_{k=1}^n : Z(\alpha_1) \cdots \overbrace{Z(\alpha_k) \cdots Z(\alpha_n)}^{\text{Kontr.}} Z(\alpha_0) :, \end{aligned}$$

bewiesen, die für  $n = 1$  wegen (2.27) gerade die Vertauschungsrelation (2.26) wiedergibt, also offensichtlich richtig ist. In einem zweiten Schritt wird dann die eigentliche Aussage gezeigt. Es sind folgende Fallunterscheidungen notwendig:

(i)  $\alpha_n \in \mathbb{R} - i\pi$ :

$Z(\alpha_n)$  ist ein Erzeugungsoperator und kann nach einer Verschiebung ans linke Ende des Normalprodukts dort herausgezogen werden. Es gilt also

$$\begin{aligned} T &= : Z(\alpha_1) \cdots Z(\alpha_n) : Z(\alpha_0) = \prod_{i=1}^{n-1} S(\alpha_i - \alpha_n) : Z(\alpha_n) Z(\alpha_1) \cdots Z(\alpha_{n-1}) : Z(\alpha_0) \\ &= \prod_{i=1}^{n-1} S(\alpha_i - \alpha_n) Z(\alpha_n) : Z(\alpha_1) \cdots Z(\alpha_{n-1}) : Z(\alpha_0). \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>Die Summe über alle Kontraktionen schließt insbesondere auch den Fall ein, daß keine Kontraktion auftritt!

Anwendung der Induktionsvoraussetzung auf den hinteren Term ergibt

$$T = \prod_{i=1}^{n-1} S(\alpha_i - \alpha_n) Z(\alpha_n) \left( : Z(\alpha_1) \cdots Z(\alpha_{n-1}) Z(\alpha_0) : \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^{n-1} : Z(\alpha_1) \cdots \overline{Z(\alpha_k) \cdots Z(\alpha_{n-1})} Z(\alpha_0) : \right).$$

Anschließend kann der Operator  $Z(\alpha_n)$  mit Hilfe der  $S$ -Matrizen auf seinen ursprünglichen Platz gebracht werden. Außerdem kann die Summe um den Term

$$0 = : Z(\alpha_1) \cdots \overline{Z(\alpha_n) Z(\alpha_0)} :$$

erweitert werden, da die Kontraktion zwischen  $Z(\alpha_n)$  und  $Z(\alpha_0)$  verschwindet, womit die Behauptung bewiesen ist.

(ii)  $\alpha_n \in \mathbb{R}$ :

$Z(\alpha_n)$  ist diesmal ein Vernichtungsoperator, kann also rechts aus dem Normalprodukt herausgezogen werden. Daraus folgt

$$T = : Z(\alpha_1) \cdots Z(\alpha_n) : Z(\alpha_0) \\ = : Z(\alpha_1) \cdots Z(\alpha_{n-1}) : \left( S(\alpha_n - \alpha_0) Z(\alpha_0) Z(\alpha_n) + 2\pi\delta(\alpha_n - \alpha_0 - i\pi) \right).$$

Anwendung der Induktionsvoraussetzung und der Beziehung

$$2\pi\delta(\alpha_n - \alpha_0 - i\pi) : Z(\alpha_1) \cdots Z(\alpha_{n-1}) : = : Z(\alpha_1) \cdots \overline{Z(\alpha_n) Z(\alpha_0)} :$$

ergibt dann

$$T = S(\alpha_n - \alpha_0) \left( : Z(\alpha_1) \cdots Z(\alpha_{n-1}) Z(\alpha_0) : \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^{n-1} : Z(\alpha_1) \cdots \overline{Z(\alpha_k) \cdots Z(\alpha_{n-1})} Z(\alpha_0) : \right) Z(\alpha_n) + : Z(\alpha_1) \cdots \overline{Z(\alpha_n) Z(\alpha_0)} :.$$

Zieht man den Operator  $Z(\alpha_n)$  wieder in das Normalprodukt und vertauscht ihn mit  $Z(\alpha_0)$ , wobei die  $S$ -Matrix verschwindet, erhält man die Behauptung.

(b) Auch die eigentliche Behauptung soll per Induktion gezeigt werden. Der Induktionsanfang war Gegenstand von (a). Es wird daher angenommen, daß die Gleichung

$$Z(\alpha_1) \cdots Z(\alpha_{n-1}) = \sum_{\forall \text{Kontr}} : Z(\alpha_1) \cdots \overline{\cdots \cdots} Z(\alpha_{n-1}) :$$

für ein gewisses  $n$  richtig ist. Dann gilt

$$Z(\alpha_1) \cdots Z(\alpha_{n-1}) Z(\alpha_n) = \sum_{\forall \text{Kontr}} : Z(\alpha_1) \cdots \overline{\cdots \cdots} Z(\alpha_{n-1}) : Z(\alpha_n).$$

Bei der Hinzunahme von  $Z(\alpha_n)$  unter das Normalprodukt treten nach (a) noch einmal sämtliche Kontraktionen dieses Operators mit den in den einzelnen Summanden noch nicht kontrahierten Operatoren auf. Das beweist die Behauptung.  $\square$

# Anhang C

## Konsistenz des neu postulierten Fusionsprozesses im Sinus-Gordon-Modell

In Lemma 6 wurde implizit ein Fusionsprozeß postuliert, der sich als für die Lokalität des Modells unbedingt notwendig herausstellte, jedoch in der Literatur bisher noch nicht diskutiert worden ist. Darum soll an dieser Stelle kurz gezeigt werden, daß seine Existenz konsistent ist mit der Bootstrap-Gleichung (1.19). Genauer wird die Identität

$$S_{b_l s}(\theta_1 - \frac{i\pi\nu}{2} - \theta) = S_{b_{k+l} s}(\theta_1 - \theta) S_{b_k s}(\theta_2 - \theta)$$

bewiesen, wobei  $\theta_1 - \theta_2 = i\pi(1 - \frac{\nu}{2}l)$ . Dieser Prozeß ist in Abbildung C.1 dargestellt. Vergleiche auch die Angaben aus Tabelle 3.3. Mit  $\theta' = \theta_1 - \theta - \frac{i\pi\nu}{2}k$  folgt  $\theta_1 - \theta = \theta' + \frac{i\pi\nu}{2}k$  und  $\theta_2 - \theta = \theta' + \frac{i\pi\nu}{2}(k+l) - i\pi$ . Nach der Ersetzung  $\theta' \rightarrow \theta$  hat man dann die Beziehung

$$S_{b_l s}(\theta) = S_{b_{k+l} s}(\theta + \frac{i\pi\nu}{2}k) S_{b_k s}(\theta + \frac{i\pi\nu}{2}(k+l) - i\pi) \quad (\text{C.1})$$

zu überprüfen. Zur Abkürzung setze

$$s_j^{(\pm)} = \sin \frac{1}{2i} \left( \theta \pm \frac{i\pi}{2} (1 + \nu j) \right).$$

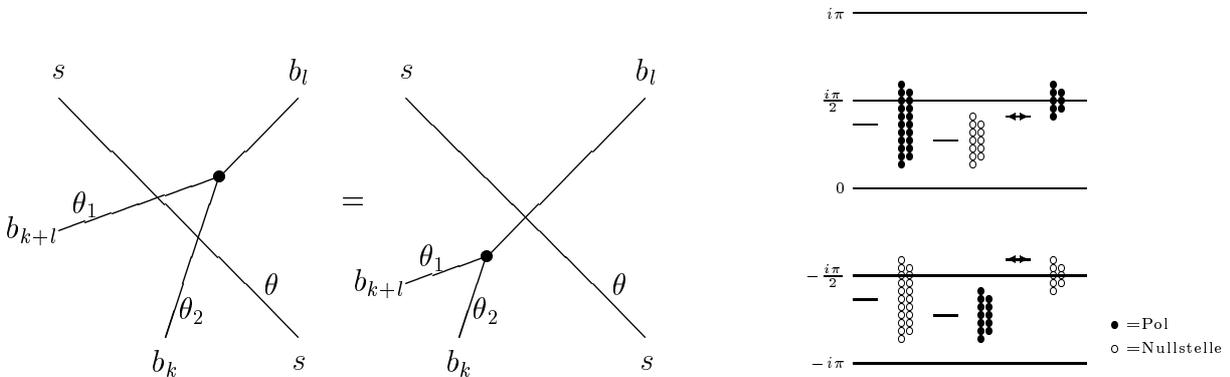


Abbildung C.1: Konsistenzbedingung für den Fusionsprozeß  $b_{k+l} + b_k \rightarrow b_l$  und Pol- bzw. Nullstellenstruktur der beteiligten  $S$ -Matrizen.

Dann gilt

$$S_{b_{j_s}}\left(\theta + \frac{i\pi\nu}{2}k\right) = (-1)^j \frac{s_{j+k}^{(+)} s_{k-j}^{(+)}}{s_{j-k}^{(-)} s_{-(j+k)}^{(-)}} \left( \frac{s_{j+k-2}^{(+)} \dots s_{k-j+2}^{(+)}}{s_{j-k-2}^{(-)} \dots s_{-(j+k)+2}^{(-)}} \right)^2$$

und

$$S_{b_{j_s}}\left(\theta - i\pi + \frac{i\pi\nu}{2}k\right) = (-1)^j \frac{s_{-(j+k)}^{(-)} s_{j-k}^{(-)}}{s_{k-j}^{(+)} s_{j+k}^{(+)}} \left( \frac{s_{-(j+k)+2}^{(-)} \dots s_{j-k-2}^{(-)}}{s_{k-j+2}^{(+)} \dots s_{j+k-2}^{(+)}} \right)^2.$$

Letzteres folgt aus  $\sin \frac{1}{2i}(\theta \mp i\pi \pm \frac{i\pi}{2}(1 + \nu j)) = \sin \frac{1}{2i}(\theta \mp \frac{i\pi}{2}(1 - \nu j))$  und der Tatsache, daß die Vorzeichen, die durch die an einigen Stellen notwendige Ersetzung  $-i\pi \rightarrow +i\pi$  entstehen, sich gegenseitig wegheben. Die rechte Seite von (C.1) schreibt sich damit

$$\begin{aligned} & (-1)^{k+l} \frac{s_{2k+l}^{(+)} s_{-l}^{(+)}}{s_l^{(-)} s_{-(2k+l)}^{(-)}} \left( \frac{s_{2k+l-2}^{(+)} \dots s_{-l+2}^{(+)}}{s_{l-2}^{(-)} \dots s_{-(2k+l)+2}^{(-)}} \right)^2 \times \\ & \times (-1)^k \frac{s_{-(2k+l)}^{(-)} s_{-l}^{(-)}}{s_l^{(+)} s_{2k+l}^{(+)}} \left( \frac{s_{-(2k+l)+2}^{(-)} \dots s_{-l-2}^{(-)}}{s_{l+2}^{(+)} \dots s_{2k+l-2}^{(+)}} \right)^2 = (-1)^l \frac{s_l^{(+)} s_{-l}^{(+)}}{s_l^{(-)} s_{-l}^{(-)}} \left( \frac{s_{l-2}^{(+)} \dots s_{l-2}^{(+)}}{s_{-l+2}^{(-)} \dots s_{-l+2}^{(-)}} \right)^2. \end{aligned}$$

Der letzte Ausdruck ist gerade die linke Seite von (C.1). Die Pol- und Nullstellenstruktur der beteiligten  $S$ -Matrizen ist der Übersichtlichkeit wegen für  $k = 3, l = 2$  noch einmal in Abbildung C.1 dargestellt. Das Resultat überträgt sich durch die Crossing-Relation der  $S$ -Matrix auf die Streuung mit einem Antisoliton. Die Konsistenz bei der Streuung mit anderen Brethern sieht man, indem man diese durch ein Solitonen-Antisolitonenpaar ausdrückt und die gerade bewiesene Beziehung verwendet.

# Anhang D

## Analysen und Nebenrechnungen

### D.1 Analyse des Beweises von Smirnov

In diesem Abschnitt werden die in Kapitel 4 zitierten Vorzeichenfehler, die in Smirnovs Buch [16] auftreten, untersucht und aufgezeigt, wie sie in seiner Nomenklatur behoben werden können. Daß irgendwo ein Fehler enthalten sein muß, erkennt man schon an Gleichung (S28), wenn man sie sich für den Fall  $A = \{\alpha\}$  hinschreibt. Sie widerspricht dann wegen des Faktors  $(-1)^{|B_2|}$  der Gleichung (2.14), die oben unter Annahme der maximalen Analytizität bewiesen worden ist. Sie wird allerdings richtig, wenn man den Faktor  $(-1)^{|B_2|}$  bei Smirnov wegläßt. Das gleiche Problem tritt in Gleichung (S29) auf. Dort muß ebenfalls der Faktor  $(-1)^{|B_2|}$  gestrichen werden. Durch die ungewöhnliche und nicht besonders logische Nomenklatur ist das Verständnis von Smirnovs Beweis und damit das Auffinden der Ursache des Fehlers ein sehr schwieriges Unterfangen gewesen. Eine weitere Erschwernis bestand darin, daß diese Formeln ohne nähere Angaben einfach „postuliert“ worden sind.

Im von mir vorgestellten Beweis in Kapitel 4 werden zu den beiden oben genannten analoge Formeln direkt per Iteration aus den Crossing-Relationen (2.13) abgeleitet. Smirnov hingegen geht den Umweg über eine außerordentlich komplizierte Verallgemeinerung der Gleichung (2.19), die die kinematischen Pole der Formfaktoren beschreibt, und beweist damit die Äquivalenz der Gleichungen (S28) und (S29), von denen er eine als wahr voraussetzt. Im Prinzip sollte dieser Weg auch begehbar sein. Es scheint jedoch so zu sein, als ob die Formel (S30), die zum Beweis der Äquivalenz verwendet wird, auch einen Vorzeichenfehler beinhaltet, der freilich weniger offensichtlich ist, als die anderen beiden genannten. Es soll hier noch angegeben werden, wie die Fehler korrigiert werden können: Wenn in (S30) statt des Faktors  $(-1)^{|B_3|}$  der Faktor  $(-1)^{|B_2|}$  auftreten würde, wären die Faktoren  $(-1)^{|B_2|}$  in den Gleichungen (S28) und (S29) nicht mehr nötig sind, um die dem Lemma S1 analoge Aussage zu zeigen. Von diesen Änderungen abgesehen müßte der Beweis nicht modifiziert werden.

### D.2 Argument des Exponentialfaktors

**Lemma 38.** *Der Ausdruck*

$$-iP(C)x = -i \sum_{(\gamma, \epsilon) \in C} m_\epsilon (ch(\gamma)x^0 - sh(\gamma)x^1)$$

hat unter der Voraussetzung  $x^0 = 0$  für  $x^1 < 0$  einen negativen Realteil, falls  $\text{Im } \gamma \in (-\pi, 0)$ . Entsprechendes gilt für  $x^1 > 0$ , falls  $\text{Im } \gamma \in (0, \pi)$ .

*Beweis.* Zerlege  $\gamma$  in Real- und Imaginärteil:  $\gamma = \alpha + i\beta$ . Eine einfache Rechnung unter Ausnutzung eines Additionstheorems und der Beziehungen  $\text{ch}(i\beta) = \cos(\beta)$  bzw.  $\text{sh}(i\beta) = i \sin(\beta)$  ergibt

$$\text{sh}(\gamma) = \text{sh}(\alpha + i\beta) = \text{sh}(\alpha)\text{ch}(i\beta) + \text{ch}(\alpha)\text{sh}(i\beta) = \text{sh}(\alpha)\cos(\beta) + i\text{ch}(\alpha)\sin(\beta).$$

Damit haben wir

$$\text{Re}(-iP(C)x) = - \sum_{(\gamma, \epsilon) \in C} m_\epsilon \text{ch}(\alpha) \sin(\beta) x^1.$$

Ist schon  $x^1 < 0$ , so muß offenbar  $\beta \in (-\pi, 0)$  gelten, falls dies kleiner als 0 sein soll. Für  $x^1 > 0$  folgt umgekehrt  $\beta \in (0, \pi)$ .  $\square$

# Anhang E

## Rechnungen zur Matrixdifferenzengleichung

### E.1 Beweis der Unitarität

**Proposition 39.** Die gegebene  $S$ -Matrix ist unitär, d.h. es gilt  $S_{ab}(\theta)S_{ba}(-\theta) = \mathbf{1}$  (vgl. (5.1)).

*Beweis.* Die einzigen Matrixelemente, die potentiell nicht verschwinden, sind

$$\begin{array}{c} \alpha \\ \diagdown \quad \diagup \\ \langle -\theta \rangle \\ \diagup \quad \diagdown \\ \alpha \end{array} = a(\theta)a(-\theta) = 1$$

$$\begin{array}{c} \alpha \quad \beta \\ \diagdown \quad \diagup \\ \langle -\theta \rangle \\ \diagup \quad \diagdown \\ \alpha \quad \beta \end{array} = \begin{array}{c} \alpha \quad \beta \\ \diagdown \quad \diagup \\ \langle -\theta \rangle \beta \\ \diagup \quad \diagdown \\ \alpha \quad \beta \end{array} + \begin{array}{c} \alpha \quad \beta \\ \diagdown \quad \diagup \\ \langle -\theta \rangle \alpha \\ \diagup \quad \diagdown \\ \alpha \quad \beta \end{array} = c(\theta)c(-\theta) + b(\theta)b(-\theta) = \frac{K^2}{K^2-\theta^2} + \frac{-\theta^2}{K^2-\theta^2} = 1$$

$$\begin{array}{c} \beta \quad \alpha \\ \diagdown \quad \diagup \\ \langle -\theta \rangle \\ \diagup \quad \diagdown \\ \alpha \quad \beta \end{array} = \begin{array}{c} \beta \quad \alpha \\ \diagdown \quad \diagup \\ \langle -\theta \rangle \beta \\ \diagup \quad \diagdown \\ \alpha \quad \beta \end{array} + \begin{array}{c} \beta \quad \alpha \\ \diagdown \quad \diagup \\ \langle -\theta \rangle \alpha \\ \diagup \quad \diagdown \\ \alpha \quad \beta \end{array} = c(\theta)b(-\theta) + b(\theta)c(-\theta) = \frac{K}{K+\theta} \cdot \frac{-\theta}{K-\theta} + \frac{\theta}{K+\theta} \cdot \frac{K}{K-\theta} = 0$$

$$\begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \langle -\theta \rangle \\ \diagup \quad \diagdown \\ 3 \end{array} = w(\theta)w(-\theta) = \frac{K-\theta}{K+\theta} \frac{K+\theta}{K-\theta} = 1$$

Alle anderen verschwinden, da die Teilchenzahlerhaltung der einzelnen Teilchensorten nicht gewährleistet ist.  $\square$

## E.2 Beweis der Yang-Baxter-Gleichung

Die Yang-Baxter-Gleichungen lauten bekanntlich

$$S_{12}(v_{12})S_{13}(v_{13})S_{23}(v_{23}) = S_{23}(v_{23})S_{13}(v_{13})S_{12}(v_{12})$$

bzw. graphisch

$$(E.1)$$

Diese Relation soll jetzt allgemein auf allen Basiselementen von  $V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$  getestet werden.

**Proposition 40.** *Die angegebene S-Matrix erfüllt die Yang-Baxter-Gleichungen.*

*Beweis.* Für die linke Seite gilt offenbar<sup>1</sup>

$$\begin{aligned}
& S_{12}(v_{12})S_{13}(v_{13})S_{23}(v_{23})x \otimes y \otimes z \\
= & S_{12}(v_{12})S_{13}(v_{13})[\sigma_{yz}b(v_{23})x \otimes z \otimes y + c(v_{23})x \otimes y \otimes z] \\
= & S_{12}(v_{12})\{\sigma_{yz}b(v_{23})[\sigma_{xz}b(v_{13})z \otimes x \otimes y + c(v_{13})x \otimes z \otimes y] \\
& + c(v_{23})[\sigma_{xy}b(v_{13})y \otimes x \otimes z + c(v_{13})x \otimes y \otimes z]\} \\
= & \sigma_{yz}b(v_{23})\sigma_{xz}b(v_{13})[\sigma_{xy}b(v_{12})z \otimes y \otimes x + c(v_{12})z \otimes x \otimes y] \\
& + \sigma_{yz}b(v_{23})c(v_{13})[\sigma_{yz}b(v_{12})x \otimes y \otimes z + c(v_{12})x \otimes z \otimes y] \\
& + c(v_{23})\sigma_{xy}b(v_{13})[\sigma_{xz}b(v_{12})y \otimes z \otimes x + c(v_{12})y \otimes x \otimes z] \\
& + c(v_{23})c(v_{13})[\sigma_{yz}b(v_{12})x \otimes z \otimes y + c(v_{12})x \otimes y \otimes z] \\
= & x \otimes y \otimes z [c(v_{12})c(v_{13})c(v_{23}) + b(v_{12})b(v_{23})c(v_{13})] \\
& + x \otimes z \otimes y [\sigma_{yz}b(v_{23})c(v_{12})c(v_{13}) + \sigma_{yz}b(v_{12})c(v_{13})c(v_{23})] \\
& + y \otimes x \otimes z [\sigma_{xy}b(v_{13})c(v_{12})c(v_{23})] \\
& + y \otimes z \otimes x [\sigma_{xy}\sigma_{xz}b(v_{12})b(v_{13})c(v_{23})] \\
& + z \otimes x \otimes y [\sigma_{xz}\sigma_{yz}b(v_{13})b(v_{23})c(v_{12})] \\
& + z \otimes y \otimes x [\sigma_{xy}\sigma_{xz}\sigma_{yz}b(v_{12})b(v_{13})b(v_{23})].
\end{aligned}$$

<sup>1</sup>Achtung: Man mache sich anhand von (1.10) klar, auf welche Bestandteile des Produktzustandes die Operatoren jeweils wirken!

Dagegen erhält man auf der rechten Seite

$$\begin{aligned}
& S_{23}(v_{23})S_{13}(v_{13})S_{12}(v_{12})x \otimes y \otimes z \\
= & S_{23}(v_{23})S_{13}(v_{13}) [\sigma_{xy}b(v_{12})y \otimes x \otimes z + c(v_{12})x \otimes y \otimes z] \\
= & S_{23}(v_{23})\{\sigma_{xy}b(v_{12}) [\sigma_{xz}b(v_{13})y \otimes z \otimes x + c(v_{13})y \otimes x \otimes z] \\
& + c(v_{12}) [\sigma_{yz}b(v_{13})x \otimes z \otimes y + c(v_{13})x \otimes y \otimes z]\} \\
= & \sigma_{xy}b(v_{12})\sigma_{xz}b(v_{13}) [\sigma_{yz}b(v_{23})z \otimes y \otimes x + c(v_{23})y \otimes z \otimes x] \\
& + \sigma_{xy}b(v_{12})c(v_{13}) [\sigma_{xy}b(v_{23})x \otimes y \otimes z + c(v_{23})y \otimes x \otimes z] \\
& + c(v_{12})\sigma_{yz}b(v_{13}) [\sigma_{xz}b(v_{23})z \otimes x \otimes y + c(v_{23})x \otimes z \otimes y] \\
& + c(v_{12})c(v_{13}) [\sigma_{xy}b(v_{23})y \otimes x \otimes z + c(v_{23})x \otimes y \otimes z] \\
= & x \otimes y \otimes z [c(v_{12})c(v_{13})c(v_{23}) + b(v_{12})b(v_{23})c(v_{13})] \\
& + x \otimes z \otimes y [\sigma_{yz}b(v_{13})c(v_{12})c(v_{23})] \\
& + y \otimes x \otimes z [\sigma_{xy}b(v_{12})c(v_{13})c(v_{23}) + \sigma_{xy}b(v_{23})c(v_{12})c(v_{13})] \\
& + y \otimes z \otimes x [\sigma_{xy}\sigma_{xz}b(v_{12})b(v_{13})c(v_{23})] \\
& + z \otimes x \otimes y [\sigma_{xz}\sigma_{yz}b(v_{13})b(v_{23})c(v_{12})] \\
& + z \otimes y \otimes x [\sigma_{xy}\sigma_{xz}\sigma_{yz}b(v_{12})b(v_{13})b(v_{23})].
\end{aligned}$$

Wie man sieht, sind einige Terme von vornherein identisch. Damit auch die anderen verschwinden, muß die Funktionalgleichung

$$[b(v_{12})c(v_{23}) + b(v_{23})c(v_{12})]c(v_{13}) = b(v_{13})c(v_{12})c(v_{23})$$

erfüllt sein. Dies ist offenbar für unsere Wahl der Gewichte richtig:

$$\begin{aligned}
& [b(v_{12})c(v_{23}) + b(v_{23})c(v_{12})]c(v_{13}) \\
= & \left[ \frac{v_1 - v_2}{v_1 - v_2 + K} \cdot \frac{K}{v_2 - v_3 + K} + \frac{v_2 - v_3}{v_2 - v_3 + K} \cdot \frac{K}{v_1 - v_2 + K} \right] \frac{K}{v_1 - v_3 + K} \\
= & \frac{v_1 - v_3}{v_1 - v_3 + K} \cdot \frac{K}{v_1 - v_2 + K} \cdot \frac{K}{v_2 - v_3 + K} = b(v_{13})c(v_{12})c(v_{23}).
\end{aligned}$$

□

## E.3 Beweis der Vertauschungsrelationen

**Lemma 41.** *Aus der durch  $S$  definierten Yang-Baxter-Struktur folgt:*

1. *Die Komponenten der Monodromiematrix erfüllen nach (5.2) die folgenden Vertauschungsrelationen:*

(a) *Aus  $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (1, 1, i, j)$  folgt*

$$a(u_1 - u_2)B_i(\vec{x}|u_2)B_j(\vec{x}|u_1) = B_{j'}(\vec{x}|u_1)B_{i'}(\vec{x}|u_2)S_{ji}^{i'j'}(u_1 - u_2).$$

(b) Aus  $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (1, i, j, k)$  folgt

$$\begin{aligned} b(u_1 - u_2)D_j^i(\vec{x}|u_2)B_k(\vec{x}|u_1) + c(u_1 - u_2)B_j(\vec{x}|u_2)D_k^i(\vec{x}|u_1) \\ = B_{k'}(\vec{x}|u_1)D_{j'}^i(\vec{x}|u_2)S_{kj}^{j'k'}(u_1 - u_2) \\ \Rightarrow D_j^i(\vec{x}|u_2)B_k(\vec{x}|u_1) = \frac{1}{b(u_1 - u_2)}B_{k'}(\vec{x}|u_1)D_{j'}^i(\vec{x}|u_2)S_{kj}^{j'k'}(u_1 - u_2) \\ - \frac{c(u_1 - u_2)}{b(u_1 - u_2)}B_j(\vec{x}|u_2)D_k^i(\vec{x}|u_1). \end{aligned}$$

(c) Durch Multiplikation der letzten Gleichung mit bestimmten  $\sigma$  erhält man unter Ausnutzung der Fermionenerhaltung

$$\begin{aligned} D_j^{\star i}(\vec{x}|u_2)B_k(\vec{x}|u_1) \\ = \sigma_{ik} \frac{1}{b(u_1 - u_2)}B_{k'}(\vec{x}|u_1)D_{j'}^{\star i}(\vec{x}|u_2)S_{kj}^{j'k'}(u_1 - u_2) \\ - \sigma_{ik} \frac{c(u_1 - u_2)}{b(u_1 - u_2)}B_j(\vec{x}|u_2)D_k^{\star i}(\vec{x}|u_1). \end{aligned}$$

Graphisch ist dies leicht zu verstehen.

(d) Aus  $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (1, 1, i, 1)$  folgt

$$\begin{aligned} a(u_1 - u_2)B_i(\vec{x}|u_2)A(\vec{x}|u_1) \\ = b(u_1 - u_2)A(\vec{x}|u_1)B_i(\vec{x}|u_2) + c(u_1 - u_2)B_i(\vec{x}|u_1)A(\vec{x}|u_2) \\ \Rightarrow A(\vec{x}|u_2)B_i(\vec{x}|u_1) = \frac{a(u_2 - u_1)}{b(u_2 - u_1)}B_i(\vec{x}|u_1)A(\vec{x}|u_2) \\ - \frac{c(u_2 - u_1)}{b(u_2 - u_1)}B_i(\vec{x}|u_2)A(\vec{x}|u_1). \end{aligned}$$

2. Die Komponenten der reduzierten Monodromiematrix erfüllen nach (5.2) die folgenden Vertauschungsrelationen:

(a) Aus  $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (2, 2, 3, 2)$  folgt

$$\begin{aligned} a(u_1 - u_2)\tilde{B}(\vec{x}|u_2)\tilde{A}(\vec{x}|u_1) = b(u_1 - u_2)\tilde{A}(\vec{x}|u_1)\tilde{B}(\vec{x}|u_2) + c(u_1 - u_2)\tilde{B}(\vec{x}|u_1)\tilde{A}(\vec{x}|u_2) \\ \Rightarrow \tilde{A}(\vec{x}|u_2)\tilde{B}(\vec{x}|u_1) = \frac{a(u_2 - u_1)}{b(u_2 - u_1)}\tilde{B}(\vec{x}|u_1)\tilde{A}(\vec{x}|u_2) - \frac{c(u_2 - u_1)}{b(u_2 - u_1)}\tilde{B}(\vec{x}|u_2)\tilde{A}(\vec{x}|u_1). \end{aligned}$$

(b) Aus  $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (2, 3, 3, 3)$  folgt

$$\begin{aligned} c(u_1 - u_2)\tilde{B}(\vec{x}|u_2)\tilde{D}(\vec{x}|u_1) + b(u_1 - u_2)\tilde{D}(\vec{x}|u_2)\tilde{B}(\vec{x}|u_1) = w(u_1 - u_2)\tilde{B}(\vec{x}|u_1)\tilde{D}(\vec{x}|u_2) \\ \Rightarrow \tilde{D}(\vec{x}|u_2)\tilde{B}(\vec{x}|u_1) = \frac{w(u_1 - u_2)}{b(u_1 - u_2)}\tilde{B}(\vec{x}|u_1)\tilde{D}(\vec{x}|u_2) - \frac{c(u_1 - u_2)}{b(u_1 - u_2)}\tilde{B}(\vec{x}|u_2)\tilde{D}(\vec{x}|u_1). \end{aligned}$$

(c) Durch Multiplikation der vorigen Gleichung mit geeigneten  $\sigma$  und unter Ausnutzung der Fermionenerhaltung ergibt sich

$$\tilde{D}^{\star}(\vec{x}|u_2)\tilde{B}(\vec{x}|u_1) = -\frac{w(u_1 - u_2)}{b(u_1 - u_2)}\tilde{B}(\vec{x}|u_1)\tilde{D}^{\star}(\vec{x}|u_2) + \frac{c(u_1 - u_2)}{b(u_1 - u_2)}\tilde{B}(\vec{x}|u_2)\tilde{D}^{\star}(\vec{x}|u_1).$$

Dies läßt sich wieder leicht graphisch verstehen.

(d) Aus  $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (2, 2, 3, 3)$  folgt

$$a(u_1 - u_2)\tilde{B}(\vec{x}|u_2)\tilde{B}(\vec{x}|u_1) = w(u_1 - u_2)\tilde{B}(\vec{x}|u_1)\tilde{B}(\vec{x}|u_2).$$

3. Es gelten folgende Vertauschungsrelationen für die Komponenten der modifizierten Monodromiematrix  $T^Q$ :

(a) Aus (5.3) folgt mit  $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (1, 1, j, 1)$

$$A^Q(\vec{x}|i)B_j(\vec{x}|u) = \frac{a(x_i - u)}{b(x'_i - u)}B_j(\vec{x}'|u)A^Q(\vec{x}|i) - \frac{c(x'_i - u)}{b(x'_i - u)}B_j^Q(\vec{x}|i)A(\vec{x}|u).$$

(b) Aus (5.4) folgt mit  $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (1, j, k, l)$

$$\begin{aligned} D_k^{Qj}(\vec{x}|i)B_l(\vec{x}|u) \\ = \frac{1}{b(u - x_i)}B_l(\vec{x}'|u)D_k^{Qj}(\vec{x}|i)S_{lk}^{k'l'}(u - x'_i) - \frac{c(u - x_i)}{b(u - x_i)}B_k^Q(\vec{x}|i)D_l^j(\vec{x}|u). \end{aligned}$$

(c) Aus der vorigen Gleichung erhält man

$$\begin{aligned} D_k^{*Qj}(\vec{x}|i)B_l(\vec{x}|u) \\ = \sigma_{jl} \frac{1}{b(u - x_i)}B_l(\vec{x}'|u)D_k^{*Qj}(\vec{x}|i)S_{lk}^{k'l'}(u - x'_i) - \sigma_{jl} \frac{c(u - x_i)}{b(u - x_i)}B_k^Q(\vec{x}|i)D_l^{*j}(\vec{x}|u). \end{aligned}$$

(d) Aus (5.3) folgt mit  $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (1, 1, j, k)$

$$B_j(\vec{x}'|u)B_k^Q(\vec{x}|i) = \frac{1}{a(x_i - u)}B_k^Q(\vec{x}|i)B_{j'}(\vec{x}|u)S_{kj}^{j'k'}(x_i - u).$$

4. Die Komponenten der reduzierten modifizierten Monodromiematrix  $\tilde{T}^Q$  erfüllen die folgenden Vertauschungsrelationen:

(a) Aus (5.3) folgt mit  $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (2, 2, 3, 2)$

$$\tilde{A}^Q(\vec{x}|i)\tilde{B}(\vec{x}|u) = \frac{a(x_i - u)}{b(x'_i - u)}\tilde{B}(\vec{x}'|u)\tilde{A}^Q(\vec{x}|i) - \frac{c(x'_i - u)}{b(x'_i - u)}\tilde{B}^Q(\vec{x}|i)\tilde{A}(\vec{x}|u).$$

(b) Aus (5.4) folgt mit  $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (2, 3, 3, 3)$

$$\tilde{D}^Q(\vec{x}|i)\tilde{B}(\vec{x}|u) = \frac{w(u - x'_i)}{b(u - x_i)}\tilde{B}(\vec{x}'|u)\tilde{D}^Q(\vec{x}|i) - \frac{c(u - x_i)}{b(u - x_i)}\tilde{B}^Q(\vec{x}|i)\tilde{D}(\vec{x}|u).$$

(c) Aus der vorigen Gleichung folgt

$$\tilde{D}^{*Q}(\vec{x}|i)\tilde{B}(\vec{x}|u) = -\frac{w(u - x'_i)}{b(u - x_i)}\tilde{B}(\vec{x}'|u)\tilde{D}^{*Q}(\vec{x}|i) + \frac{c(u - x_i)}{b(u - x_i)}\tilde{B}^Q(\vec{x}|i)\tilde{D}^*(\vec{x}|u).$$

(d) Aus (5.3) folgt mit  $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (2, 2, 3, 3)$

$$\tilde{B}(\vec{x}'|u)\tilde{B}^Q(\vec{x}|i) = \frac{w(x'_i - u)}{a(x_i - u)}\tilde{B}^Q(\vec{x}|i)\tilde{B}(\vec{x}|u).$$



## E.4 Die Hilfsfunktionen

**Lemma 43.** *Die Funktionen*

$$\psi(x) = \frac{\Gamma(1 + \frac{K}{\xi} + \frac{x}{\xi})}{\Gamma(1 + \frac{x}{\xi})}, \quad \tau(x) = x \frac{\Gamma(\frac{x}{\xi} - \frac{K}{\xi})}{\Gamma(1 + \frac{x}{\xi} + \frac{K}{\xi})}, \quad \tilde{\tau}(x) = \frac{x}{x - K}$$

erfüllen für beliebige, aber feste Zahlen  $\xi, \phi \in \mathbb{C}$  die Funktionalgleichungen

$$b(x)\psi(x) = \psi(x - \xi), \quad \frac{\tau(x)}{b(x)} = \frac{\tau(x - \xi)}{b(\xi - x)}, \quad \frac{\tilde{\tau}(x)}{b(-x)} = \frac{\tilde{\tau}(x - \xi)}{b(\xi - x)}.$$

Offenbar ist es möglich, jede dieser Funktionen noch mit einer  $\xi$ -periodischen Funktion zu multiplizieren, ohne daß sich die Funktionalgleichungen ändern. Dies schließt insbesondere einen konstanten Faktor ein („Normierung“).

*Beweis.*

1. Mit  $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$  folgt

$$\begin{aligned} b(x)\psi(x) &= \frac{x}{K + x} \cdot \frac{\Gamma(1 + \frac{K}{\xi} + \frac{x}{\xi})}{\Gamma(1 + \frac{x}{\xi})} = \frac{x}{K + x} \cdot \frac{\Gamma(\frac{K}{\xi} + \frac{x}{\xi})}{\Gamma(\frac{x}{\xi})} \cdot \frac{\frac{K}{\xi} + \frac{x}{\xi}}{\frac{x}{\xi}} \\ &= \frac{\Gamma(\frac{K}{\xi} + \frac{x}{\xi})}{\Gamma(\frac{x}{\xi})} = \psi(x - \xi). \end{aligned}$$

2. Genau wie eben gilt

$$\begin{aligned} \frac{\tau(x)}{b(x)} &= \frac{K + x}{x} x \frac{\Gamma(\frac{x}{\xi} - \frac{K}{\xi})}{\Gamma(1 + \frac{x}{\xi} + \frac{K}{\xi})} = (K + x) \frac{\frac{x}{\xi} - \frac{K}{\xi} - 1}{\frac{x}{\xi} + \frac{K}{\xi}} \cdot \frac{\Gamma(\frac{x}{\xi} - \frac{K}{\xi} - 1)}{\Gamma(\frac{x}{\xi} + \frac{K}{\xi})} \\ &= \frac{\xi - x + K}{\xi - x} (x - \xi) \frac{\Gamma(\frac{x}{\xi} - \frac{K}{\xi} - 1)}{\Gamma(\frac{x}{\xi} + \frac{K}{\xi})} = \frac{\tau(x - \xi)}{b(\xi - x)}. \end{aligned}$$

3. Die Behauptung folgt sofort aus

$$\tilde{\tau}(x) = -b(-x),$$

weil beide Seiten der Funktionalgleichung dann offensichtlich  $-1$  sind.

□

## E.5 Nebenrechnungen

**Lemma 44.** *Für die verwendeten Gewichte gilt*

$$\frac{c(-\theta)}{b(-\theta)} = -\frac{c(\theta)}{b(\theta)}.$$

*Beweis.*

$$\frac{c(-\theta)}{b(-\theta)} = \frac{K}{K-\theta} \cdot \frac{K-\theta}{-\theta} = -\frac{K}{K+\theta} \cdot \frac{K+\theta}{\theta} = -\frac{c(\theta)}{b(\theta)}.$$

□

**Lemma 45.** *Für die verwendeten Gewichte gilt*

$$\frac{w(\theta)}{b(\theta)} = -\frac{1}{b(-\theta)}.$$

*Beweis.* Eine einfache Rechnung ergibt

$$\frac{w(\theta)}{b(\theta)} = \frac{K-\theta}{K+\theta} \cdot \frac{K+\theta}{\theta} = -\frac{K-\theta}{-\theta} = -\frac{1}{b(-\theta)}.$$

□

# Zusammenfassung und Ausblick

In der vorliegenden Arbeit wurde in den ersten Kapiteln ein umfassender Überblick über die grundlegenden Aspekte von integrablen Modellen der Quantenfeldtheorie in  $1 + 1$  Dimensionen gegeben, die seit Mitte der 70er Jahre intensiv erforscht werden, und ihre Konsequenzen vorgestellt [9]. Als besonders wichtig erwies sich dabei die Faktorisierung der  $S$ -Matrix [10], die einerseits die Verbindung zum Gebiet der Quantengruppen herstellt und es andererseits erlaubt, zusammen mit bestimmten quantenfeldtheoretischen Überlegungen ein Gleichungssystem aufzustellen, aus dem sich unter Annahme maximaler Analytizität eine eindeutige  $S$ -Matrix ergibt, wenn gewisse Anfangsparameter des Modells wie Teilchenarten, Symmetrien usw. gegeben sind [28, 49]. Dieses sogenannte Bootstrap-Programm wurde in Kapitel 3 ausführlich an den Beispielen  $Z(N)$ -Ising- und Sinus-Gordon-Modell veranschaulicht. Während die  $S$ -Matrix nur das On-Shell-Verhalten der Theorie beschreibt, gelingt es mit dem sogenannten Formfaktorprogramm den Übergang zu den Off-Shell-Größen, den Korrelationsfunktionen, zu finden. Unter Annahme der maximalen Analytizität und Ausnutzung der Faktorisierung der  $S$ -Matrix lassen sich so per LSZ-Reduktion Eigenschaften dieser Formfaktoren beweisen [14, 16].

Das Ziel dieser Arbeit war der Nachweis, daß die Gleichungen des Bootstrap- und des Formfaktorprogramms die Lokalität der Felder implizieren. Bemühungen zu dieser Problematik gab es Anfang der 90er Jahre von F. A. Smirnov [16] und M. Yu. Lashkevich [39], deren Beweise jedoch insofern unbefriedigend sind, als daß sie beide nur für Modelle ohne gebundene Zustände Gültigkeit haben. Außerdem enthält Smirnov's Beweis einige Unstimmigkeiten, und Lashkevich's Beweis ist auf Modelle mit diagonalen  $S$ -Matrizen beschränkt. Smirnov hat in seinem Beweis Crossing-Formeln [16, Gleichungen 28, 29 und 30] verwendet, die einige Vorzeichenfehler enthalten. Unter Verwendung des LSZ-Formalismus ist es mir unter Annahme der maximalen Analytizität der Formfaktoren gelungen, in einem ersten Schritt zwei Rekursionsbeziehungen herzuleiten (siehe (2.13)) und anschließend per Induktion zwei allgemeine Crossing-Formeln zu beweisen (siehe Sätze 9 und 10). Es stellte sich heraus, daß mit diesen korrigierten Gleichungen tatsächlich die Lokalität bewiesen werden kann (siehe Theorem 12). Um den von seiner Nomenklatur her sehr schwierigen Beweis anschaulich zu machen, habe ich graphische Methoden, wie sie zum Beispiel in [14] zu finden sind, weiterentwickelt. In einem kleinen Exkurs wird ein alternativer Beweis der allgemeinen Crossing-Relation angegeben, der als Hilfsmittel ausschließlich die Zamolodchikov-Algebra verwendet und damit ein weiteres Indiz für deren Bedeutung in integrablen Modellen der Quantenfeldtheorie in  $1 + 1$  Dimensionen liefert.

In der Vergangenheit gab es Versuche, eine graphische Notation für diejenigen Gleichungen des Bootstrap- bzw. Formfaktorprogramms zu finden, mit denen gebundene Zustände beschrieben werden [14]. Für Darstellungen von Quantengruppen ist eine gra-

phische Beschreibung der Fusionsregeln seit Anfang der 80er Jahre bekannt [48]. Da dort jedoch im Gegensatz zu hier unsymmetrische  $R$ - und keine symmetrischen  $S$ -Matrizen auftreten und außerdem physikalische Parameter wie die Parität von Zuständen, etc. keine Rolle spielen, gab es Schwierigkeiten, in integrablen Modellen ein konsistentes Bild zu konstruieren. In dieser Arbeit wird ein System von  $S$ -Matrix- und Formfaktorgleichungen vorgestellt, daß meines Erachtens gleichzeitig optimal auf eine graphische Notation und auf das Wechselspiel der jeweiligen Gleichungen ausgerichtet ist (siehe Definitionen 1 und 2). Für das  $Z(N)$ -Ising- und das Sinus-Gordon-Modell wurde durch explizite Angabe von Phasenkonventionen und Berechnung einiger Residuen von  $S$ -Matrizen gezeigt, daß sie sich in diesem neuen Rahmen darstellen lassen (siehe Sätze 5 und 7). Gleiches ist für andere Modelle zu vermuten und sollte noch eingehender untersucht werden.

Nach der Anpassung der  $S$ -Matrix- und Formfaktorgleichungen war es möglich, den Beweis der Lokalität ohne große Schwierigkeiten auch auf Modelle mit gebundenen Zuständen auszudehnen. Dabei treten im Vergleich zu vorher einerseits mehr Zwischenzustände auf, und andererseits haben sowohl die Formfaktoren als auch die  $S$ -Matrizen zusätzliche Pole. Indem alle möglichen Residuen der in der Entwicklung auftretenden Formfaktoren berechnet wurden, konnte gezeigt werden, daß sie zu Gruppen zusammengefaßt werden können, die für sich jeweils keinen Beitrag ergeben. Der Zusammenhang der diskutierten Intertwiner mit der Darstellungstheorie der Quantengruppen [50], die zu der zugrundeliegenden Yang-Baxter-Algebra gehören, sollte noch genauer untersucht werden.

Die Frage nach den Kommutationsbeziehungen fermionischer Felder ist ein offenes Problem. Die Formfaktorgleichungen fermionischer Operatoren enthalten an bestimmten Stellen zusätzliche Vorzeichen, so daß es vermutlich einfach ist, völlig analog zum bosonischen Fall ein Antikommutativitätstheorem zu zeigen [39]. Interessant wäre es zudem, die Formulierung integrierbarer Modelle über die Zamolodchikov-Algebra weiterzuentwickeln. Dazu gehört vor allen Dingen die Konstruktion einer Darstellung derselben in physikalischen Räumen für nichtdiagonale  $S$ -Matrizen, die meiner Kenntnis nach im Gegensatz zum diagonalen Fall [55] bisher noch nicht gelungen ist.

In Kapitel 5 wurde ein sogenannter verschachtelter Off-Shell Bethe Ansatz [43, 44] zur Lösung einer Matrix-Differenzgleichung verwendet, die in engem Verhältnis steht zu der Watson-Gleichung (2.17) und der Gleichung (2.18) für die zyklische Vertauschung von Argumenten in Formfaktoren. Dabei wurden die Ideen, die schon für  $S$ -Matrizen mit  $SU(N)$ -,  $U(N)$ - und  $U_q[su(N)]$ -Symmetrie angewendet worden sind [41, 42], erfolgreich auf eine  $S$ -Matrix übertragen, die mit dem supersymmetrischen t-J-Modell [21, 22] assoziiert ist. Anschließend wurde gezeigt, daß die konstruierten Lösungen Höchste-Gewicht-Vektoren der supersymmetrischen Lie-Algebra  $spl(2, 1)$  sind, und die dazugehörigen Gewichte explizit ausgerechnet. Mit Hilfe von rein gruppentheoretischen Überlegungen wie der Anwendung von Leiteroperatoren sollte es dann möglich sein, alle Lösungen anzugeben.

Für die Zukunft sind Untersuchungen der entsprechenden  $q$ -deformierten Matrixdifferenzgleichung vorgesehen, die mit der gradierten Algebra  $U_q[spl(2, 1)]$  verbunden ist. Nach den vorliegenden Erkenntnissen scheint es so zu sein, als ob der Off-Shell Bethe Ansatz als Lösungsmethode für Matrixdifferenzgleichungen des betrachteten Typs eine gewisse Universalität besitzt. Eine weitere wichtige Anwendung könnte daher darin bestehen, den Off-Shell Bethe-Ansatz zur Bestimmung der Formfaktoren des  $O(N)$ -symmetrischen  $\sigma$ -Modells einzusetzen und anschließend dessen Korrelationsfunktionen zu bestimmen. Eine weitere offene Frage ist, ob sich mit der supersymmetrischen  $S$ -Matrix

des t-J-Modells ein quantenfeldtheoretisches Modell in Verbindung bringen läßt.

## Danksagung

Diese Arbeit entstand in der Arbeitsgruppe von Herrn Prof. R. Schrader unter Anleitung von Herrn Priv.-Doz. Dr. M. Karowski und Herrn Dr. A. Zapletal. Mein tiefster Dank gebührt Herrn Dr. Karowski. Die intensive Betreuung, die sich in zahlreichen Arbeitsgruppentreffen und Diskussionen, sowie der ständigen Bereitschaft äußerte, für Fragen zur Verfügung zu stehen, und die durchdachte Themenwahl, die es mir erlaubte, einen sehr guten Überblick über das Gebiet der integrablen Modelle und der Quantengruppen zu gewinnen, haben mir eine äußerst angenehme und lehrreiche Diplomandenzeit beschert. Aus der Freiheit, mich auch mit anderen Fragestellungen beschäftigen zu können, entstand unter Anleitung von Herrn Dr. A. Zapletal der zweite Teil dieser Arbeit, dem ich für die Anregung und die zahlreichen Diskussionen ebenfalls zu Dank verpflichtet bin. Insbesondere meine Vorliebe für die Schönheit und Einfachheit graphischer Techniken, die sich durch die gesamte Arbeit ziehen, geht auf ihn zurück.

Für die Möglichkeit, im März 1999 an der Tagung des Sonderforschungsbereichs 288 „Differentialgeometrie und Quantenphysik“ in Blossin und Anfang Juli 1999 am Workshop über „Grundlagen und konstruktive Aspekte der QFT“ in Göttingen teilnehmen zu können, möchte ich mich außerdem ganz herzlich bei Herrn Prof. R. Schrader bedanken.

Viele Grüße und Wünsche auf einen erfolgreichen Abschluß gehen an alle diejenigen, denen ich über die fachliche oder politische Arbeit an diesem Fachbereich verbunden war.



# Literaturverzeichnis

- [1] D. J. Korteweg und G. de Vries, *Phil. Mag.* **39**, (1895).
- [2] C. S. Gardner, J. M. Greene, R. M. Kruskal und M. D. Miura, *Phys. Rev. Lett.* **19**, 1095 (1967).
- [3] I. Cherednik, *Basic Methods of Soliton Theory*, Nr. 25 in *Adv. Series in Math. Phys.* (World Scientific, Singapore, 1996).
- [4] L. D. Faddeev und L. A. Takhtajan, *Hamiltonian Methods in the Theory of Solitons* (Springer, New York, Berlin, Heidelberg, 1986).
- [5] J. D. Bjorken und S. D. Drell, *Relativistic Quantum Fields* (McGraw-Hill Book Company, New York, 1965).
- [6] N. N. Bogolyubov und D. V. Shirkov, *Introduction to the Theory of quantized Fields, Interscience Monographs in physics and astronomy* (Interscience Publishers, Inc., London, 1960).
- [7] C. Itzykson und J. B. Zuber, *Quantum Field Theory* (McGraw-Hill Book Company, New York, 1985).
- [8] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields* (Cambridge University Press, Cambridge, New York, Melbourne, 1995), Vol. I.
- [9] P. P. Kulish und E. R. Nissimov, *JETP Pisma* **24**, 247 (1976).
- [10] D. Iagolnitzer, *Phys. Rev.* **D18**, 1275 (1978).
- [11] S. Majid, *Int. J. Mod. Phys.* **A5**, 1 (1990).
- [12] C. Kassel, *Quantum Groups* (Springer, New York, Berlin, Heidelberg, 1995).
- [13] V. Chari und A. Pressley, *A Guide to Quantum Groups* (Cambridge University Press, Cambridge, New York, Melbourne, 1995).
- [14] H. Babujian, A. Fring, M. Karowski und A. Zapletal, *Nucl. Phys.* **B538**, 535 (1999).
- [15] H. J. de Vega, *Int. J. Mod. Phys.* **A4**, 2371 (1989).
- [16] F. A. Smirnov, *Form Factors in completely integrable Models of Quantum Field Theory*, Nr. 14 in *Adv. Series in Math. Phys.* (World Scientific, Singapore, 1992).

- [17] R. J. Baxter, *Exactly Solved Models in Statistical Mechanics* (Academic Press, London, 1982).
- [18] L. D. Faddeev und L. A. Takhtadzhyan, Zap. Nauch. Semin. LOMI 109 **134**, (1981).
- [19] C. N. Yang und M. L. Ge, *Braid Groups, Knot Theory and Statistical Mechanics*, Nr. 9 in *Adv. Series in Math. Phys.* (World Scientific, Singapore, 1989).
- [20] M. Jimbo, *Yang-Baxter Equation in integrable Systems*, Nr. 10 in *Adv. Series in Math. Phys.* (World Scientific, Singapore, 1990).
- [21] A. Foerster, Doktorarbeit, FU Berlin, 1993.
- [22] V. E. Korepin und F. H. Eßler, *Exactly Solvable Models of strongly correlated Electrons*, Nr. 18 in *Adv. Series in Math. Phys.* (World Scientific, Singapore, 1994).
- [23] A. B. Zamolodchikov, Nucl. Phys. **B343**, 695 (1990).
- [24] M. Karowski, in *Field Theoretic Methods in Particle Physics*, edited by W. Rühl (Plenum Pub. Co., New York, 1980).
- [25] B. Schroer, T. T. Truong und P. Weisz, Phys. Lett. **63**, 422 (1976).
- [26] G. Chew, *The S-Matrix Theory of Strong Interactions* (W. A. Benjamin, Inc., New York, 1961).
- [27] W. Heisenberg, Zeit. für Naturforschung **1**, 608 (1946).
- [28] M. Karowski und H. J. Thun, Nucl. Phys. **B130**, 295 (1977).
- [29] S. Coleman, Phys. Rev. **D11**, 2088 (1975).
- [30] M. Karowski, Nucl. Phys. **B153**, 244 (1979).
- [31] G. Barton, *Introduction to Dispersion Techniques in Field Theory* (W.A. Benjamin Inc., New York, Amsterdam, 1965).
- [32] M. Karowski und P. Weisz, Nucl. Phys. **B139**, 455 (1978).
- [33] J. Balog, M. Niedermaier und T. Hauer, Phys. Lett. **B386**, 224 (1996), (hep-th/9604161).
- [34] J. Balog *et al.*, hep-lat/9903036 (1999).
- [35] H.-H. Lin, L. Balents und M. P. A. Fisher, cond-mat/9801285 (unveröffentlicht).
- [36] R. Konik, F. Lesage, A. W. W. Ludwig und H. Saleur, cond-mat/9806334 (unveröffentlicht).
- [37] R. Konik und A. W. Ludwig, cond-mat/9810332 (unveröffentlicht).
- [38] A. B. Zamolodchikov und A. B. Zamolodchikov, Ann. Phys. **120**, 253 (1979).
- [39] M. Y. Lashkevich, hep-th/9406118 (unveröffentlicht).

- [40] I. M. Gel'fand und G. E. Shilov, *Generalized Functions* (Academic Press, New York, London, 1964), Vol. 1.
- [41] H. Babujian, M. Karowski und A. Zapletal, J. Phys. **A30**, 6425 (1997).
- [42] A. Zapletal, J. Phys. **A31**, 9593 (1998).
- [43] H. Babujian, in *Proc. XXIV Int. Symp. Ahrenshoop* (Zeuthen, 1990).
- [44] H. Babujian, J. Phys. **A26**, 6981 (1993).
- [45] A. Zapletal, Diplomarbeit am Fachbereich Physik der Freien Universität Berlin (unveröffentlicht).
- [46] H. Lehmann, K. Symanzik und W. Zimmermann, Nuovo Cimento **1**, 205 (1955).
- [47] H. Lehmann, K. Symanzik und W. Zimmermann, Nuovo Cimento **6**, 319 (1957).
- [48] N. Y. Reshetikhin, LOMI E-4-87 (1988).
- [49] M. Karowski, Mitschrift einer Vorlesung an der FU Berlin im WS 98/99 (unveröffentlicht).
- [50] P. P. Kulish, N. Y. Reshetikhin und E. K. Sklyanin, Lett. Math. Phys. **5**, 393 (1981).
- [51] K. M. Watson, Phys. Rev. **95**, 228 (1954).
- [52] B. Schroer, hep-th/9712124 (1997).
- [53] M. R. Niedermaier, Commun. Math. Phys. **196**, 411 (1998).
- [54] B. Berg, M. Karowski und P. Weisz, Phys. Rev. **D19**, 2477 (1979).
- [55] A. Fring, Int. J. Mod. Phys. **A11**, 1337 (1996).
- [56] S. Lukyanov, hep-th/9307196 (unveröffentlicht).
- [57] S. Plepp, Diplomarbeit am Fachbereich Physik der Freien Universität Berlin (unveröffentlicht).
- [58] R. Koeberle und J. A. Swieca, Phys. Lett. **B86**, 209 (1979).
- [59] A. B. Zamolodchikov, JEPT Lett. **25**, 468 (1977).
- [60] M. Karowski, privater Austausch, 1999.